(article begins on next page)

שיטות חדשות תכנים חדשים

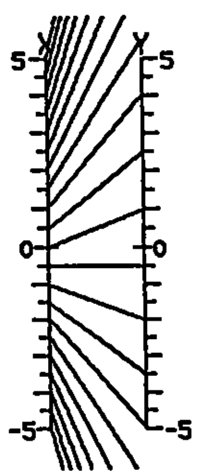
החיפוש אחר המוקד

מאת: **אברהם הרכבי**, מכון ויצמן למדע
רפי נחמיאס, אוניברסיטת תל אביב

1. הזמנה לחקירה

בנוסף לייצוגים האלגברי והקרטזי בם אנו כה מורגלים, ניתן לייצג פונקציות בדרכים רבות אחרות. מאמר זה הינו הזמנה לחקירה מתמטית של ייצוג גרפי נוסף, פחות מוכר, של פונקציות כשהכוונה היא לחקור מושגים מוכרים מזווית ראיה בלתי שיגרתית. אין מטרתנו לערער על החשיבות של הייצוג הגרפי של פונקציות במערכת צירים קרטזית, אלא לנסות ולהפריד מעט בין המושג לבין ייצוגו

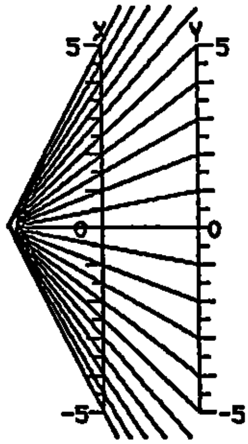
הייצוג הגרפי אותו נחקור הינו הצגת פונקציות במערכת צירים מקבילה, אותה נכנה בהמשך הייצוג המקביל. הצגה זו כוללת שני צירים מקבילים, כשהאחד מייצג את התחום והשני את הטווח. אוסף קווים ממפה נקודות מן התחום אל תמונתם בטווח. קווים אלו מכונים קווי **מיפוי**. בציור מס׳ 1 מופיע לדוגמא ייצוגה המקביל של הפונקציה $f(x) = 3x + 1$. במאמר אשר פורסם ב״מספרים״ (נחמיאס והרכבי, 1989), ניתן למצוא פרטים נוספים אודות הייצוג המקביל



ציור מס׳ 1

הנושא לחקירתנו בייצוג המקביל הינה הפונקציה הקווית ונקודת פגישתם של קווי

המיפוי (או המשכם) שאותה נכנה **מוקד**. בציור מס' 2 מופיע הייצוג המקביל של הפונקציה $f(x) = 2x$ עם מוקדה.

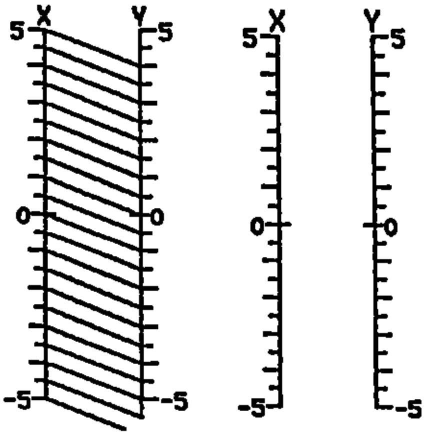


ציור מס' 2

אתה, קורא יקר, חדד את עפרונך והצטרף אלינו לחקירה. אם ברשותך מיקרו־מחשב וברצונך לעשות בו שימוש ככלי תכנותי וגרפי בסיוע לחקירה, בצע את התרגילים שבשולי העמוד אם אכן תחליט להשקיע בהם מעט מזמנך, נכונות לך מספר הרפתקאות מתמטיות. אך אם תדלג על תרגילים אלה, לא תפגע בקריאה השוטפת של המאמר.

2. פגישה ראשונה עם המוקד

בוא ונתידד עם הייצוג. ראשית, שרטט נא לדוגמא את הפונקציות הקוויות הבאות $f(x) = -3x$ ו $f(x) = 2x - 2$ במערכת הצירים המוצגות בציור מס' 3.



ציור מס' 3 ציור מס' 4

בפונקציה $f(x) = -3x$ נפגשים כל קווי המיפוי בנקודה אחת גם בפונקציה $f(x) = 2x-2$, אם נאריך את קווי המיפוי, ייפגשו כולם בנקודה אחת כאמור, כינינו נקודה זו בשם מוקד הפונקציה הקווית

האם לכל פונקציה קווית יש מוקד? כדי לענות על השאלה, נתבונן בייצוג המקביל כדי שלא יהיה לפונקציה מוקד חייבים קווי המיפוי להיות מקבילים. במקרה זה היחס בין אורך כל "קטע" בתחום לאורך תמונתו בטווח (הלא הוא "השיפוע"), הינו 1. במילים אחרות, למשפחת הפונקציות $f(x) = x + b$ לא קיים מוקד (או המוקד "נמצא" באינסוף, ראה למשל ציור מס' 4).

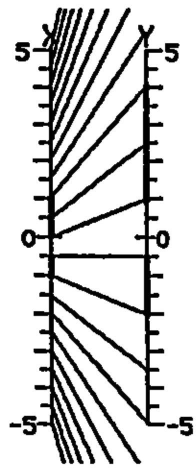
תרגיל מחשב מספר 1: תוכנית ה-Basic הקצרה שלפניך מקבלת כקלט את הפרמטרים a ו-b של הפונקציה הקווית y=ax+b ומשרטטת את הייצוג המקביל של הפונקציה. הסב את התוכנית שלפניך כך שתתאים להרצה על המיקרו-מחשב שבידך. כן תוכל, אם תרצה, להשתמש בה ככלי עזר בעת חקירותיך. התוכנית נכתבה עבור צג גרפי בגודל 400x250 כאשר נקודת ה-(0,0) הינה בפינה השמאלית העליונה. נקודת ה-0 על ציר ה-x מצויה בנקודה (200,110). גודל כל יחידה על הציר הינה בת 50 נקודות.

```
100 ' * Entering the function parameters *
150 PRINT "Enter a and b in f(x)=ax+b";
160 INPUT a,b
200 ' * Drawing the mapping lines *
210 LINE (200,10)-(200,210)
220 LINE (250,10)-(250,210)
230 LINE (195,110)-(205,110)
240 LINE (245,110)-(255,110)
300 ' * Drawing PAR (unit= 50 pixels) *
310 FOR X=-2 TO 2 STEP 0.2
320 Y=a*X+b
330 LINE (200,-X*50+110)-(250,-Y*50+110)
340 NEXT X
```

שתי שאלות נוספות קופצות לקצה הלשון. האם לכל פונקציה קווית (פרט למקרה בו $a = 1$) מתאים אך ורק מוקד אחד? האם לכל מוקד מתאימה אך ורק פונקציה קווית אחת? התשובה לשתיהן הינה חיובית. נותיר בידי המתמטיקאים החרוצים שביניכם להוכיח זאת

קיום ויחידות המוקד והעובדה כי לכל מוקד שאינו על ציר x קיימת אך ורק פונקציה קווית אחת, מאפשרים לנו להתיחס אל המוקד כאל ישות המייצגת בצורה חד ערכית פונקציה קווית. עובדה זו פותחת בפנינו את השער בפני החקירה בה אנו מזמינים אתכם להשתתף. נושא החקירה הינו הפונקציה הקווית (המקדמים a ו b ב $f(x) = ax + b$).

בפרקים הבאים נחשוף, צעד אחר צעד, את הקשר הזה. כיוון שבחקירה מסודרת חפצה נפשנו, נפתח בשאלה כיצד משפיע גודלו של המקדם a בפונקציה $f(x) = ax + b$ על מיקומו של המוקד

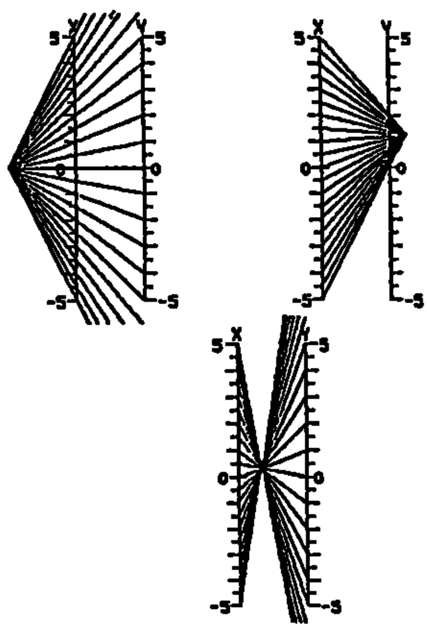


ציור מס' 5

3. השפעת המקדם a על מיקום המוקד

המקדם a בפונקציה $f(x) = ax+b$ הוא הגורם הכיפלי לפיו גדל או קטן קטע בתחום בעת שהוא מועתק אל תמונתו בטווח. לדוגמא, בפונקציה $f(x) = 3x + 1$ תמונת כל קטע בטווח ארוכה פי 3 מאורכו בתחום (ראה ציור מס' 5). לעיתים קרובות מכונה a "שיפוע הפונקציה", כינוי אשר קשור למשמעותו בייצוג בקרטזי. גם בייצוג המקביל יש לגודלו של a אפקטים חזותיים

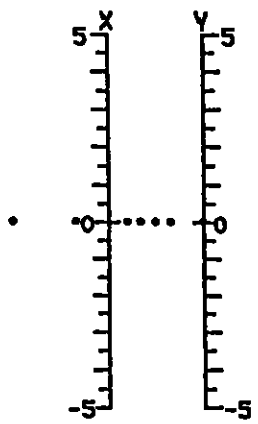
* הגורם הכיפלי משתקף כ"התפזרות" או "התמקדות" (במשולב עם "התהפכות" כאשר a שלילי) של אלומת קווי המיפוי מכיוון התחום אל הטווח, בדומה לקרני האור בפנס. כפי שמוצג בציור מס' 6, כיוון קרני האור בפנס מרמז על גודלו של a



ציור מס' 6

* הממקדים את תשומת ליבם במוקד ירגישו, כי מיקומו של המוקד ביחס לצירים משקף ערכים שונים של a.

הבה נסיק באלו מקרים ממוקם המוקד באזורים השונים של הייצוג המקביל משמאל לציר x, מימין לציר y, בין הצירים, ועליהם. נבחן, מתי (אם בכלל) יימצא המוקד בכל אחד מאזורים אלו חשוב על כך לפני המשך הקריאה.



ציור מס' 7

בעקבות התבוננות בייצוג המקביל, מתבררת התמונה כאלומת קווים בצהרי יום כאשר a גדול מ 1, מוגדלת תמונתו של כל קטע בתחום, והמוקד לפיכך הוא משמאל לציר x. כאשר a בין 0 ל 1 מוקטנת תמונתו של כל קטע בתחום, והמוקד הוא מימין לציר y כאשר a שלילי, המוקד נמצא בין הקווים. וכמובן, כאשר $a = 1$, קווי המיפוי מקבילים ולא קיים מוקד. אם כך, עבור איזו פונקציה יהיה המוקד על ציר y? ומה בנוגע לציר x?.

נסכם בתרגיל התאמה בין המוקדים המופיעים בציור מס' 7 לבין הערכים הבאים של a במשפחת בפונקציות $y = ax$

$a = 0$ (1)	$a = -2$ (2)	$a = -1$ (3)
$a = ½$ (4)	$a = -½$ (5)	$a = 2$ (6)
$a = 4$ (7)	$a = -4$ (8)	

תרגיל מחשב מספר 2

תוכנית מחשב זו מקבלת כקלט את a של הפונקציה הקוית $y=ax$, ואמורה לשרטט את המוקד בייצוג המקביל.

בצע את חישובים המתאימים והשלם את החסר בשורה 330 כדי שיצוייר המוקד.

כעת כאשר ברשותך תוכנית מחשב לציור המוקד בייצוג המקביל של המשפחת $y=ax$, תוכל, אם תרצה, לחשתמש בה ככלי עזר בעת חקירותיך

```
100 ' * Entering the function slope *
150 PRINT "Enter a  in f(x)=ax   ".
160 INPUT a
200 ' * Drawing the mapping lines  *
210 LINE (200,10)-(200,210)
220 LINE (250,10)-(250,210)
230 LINE (195,110)-(205,110)
240 LINE (245,110)-(255,110)
300 ' * The horizontal location of the focus
330 Xfocus=( [______] ) *50+200
340 CIRCLE ( Xfocus,110),1
```

מזיזים את המוקד

הבה ננסה לראות את מיקומו של המוקד כרצף. נתחיל כאשר a נמצא ב $-\infty$ (לצורך ענייננו נסתפק ב $a = -10$). המוקד נמצא, כפי שראית קודם לכן, בין הצירים, קרוב מאוד לציר ה x. ניתן לומר כי מיקומו שואף לציר ה x מימין. נתחיל להגדיל את a והמוקד "ינוע" ימינה. כאשר $a = -1$ הגענו כבר למחצית המרחק בין הצירים, ואם נמשיך ונגדיל את a, הפעם בפסיעות קטנות יותר. $a = -½$, $a = -¼$, $a = -{}^1\!/_{10}$, וכן הלאה, המוקד יתקרב לציר ה y. כאשר $a = 0$, המוקד נמצא בדיוק על הציר. נמשיך ונגדיל את a בפסיעות קטנות $a = {}^1\!/_{10}$, $a = {}^1\!/_5$, והמוקד ינוע ימינה. כך, ככל שנתקרב ל 1 "מלמטה", כן יתרחק המוקד ימינה כאשר a שואף ל 1, שואף מיקום המוקד לאינסוף. נמשיך ונגדיל את a

במעט, מעבר ל 1, והמוקד "יופיע" בצד השני של הישר המקביל, כלומר משמאל לציר ה־x. ככל שנגדיל את a, שוב ינוע לו המוקד בביטחה ימינה לכיוון ציר ה x. וככל ש a יתקרב ל ∞ ישאף המוקד להיות על ציר x. עתה שחזר במהירות את תנועתו של המוקד מצידו הימני של ציר ה x אל צידו השמאלי (הבחן ב"קפיצה מעל האינסוף" מ ∞ - ל ∞ + כאשר אנו משנים את ערכו של a מסביב ל 1)

קצב ההשתנות של מיקום המוקד

הבה ניבחן את "תנועתו" של המוקד מזווית אחרת. נתייחס עדיין למשפחת הפונקציות $y = ax$, נמשיך להריץ את a בין הערכים $-\infty$ עד ∞ אך הפעם לא נתבונן רק על מיקום המוקד, אלא גם על "מהירות התזוזה" שלו, כאשר אנו מעלים את ערכו של a בפסיעות שוות גודל הבה נתבונן על 200 הפסיעות באורך 0.1 המתחילות ב 10- ומסתיימות ב 10 במהלך 90 הפסיעות הראשונות של הגדלת a מ 10- עד 1-, יעבור המוקד דרך השווה למחצית המרחק בין הצירים בעשר הפסיעות הבאות "ינוע" המוקד הרבה יותר "מהר" ויעבור את המחצית השניה השלמנו את מחצית התחום של a ועברנו "רק" את המרחק בין הצירים ועתה נע המוקד "מהר יותר", בחמישה צעדים הבאים יעשה כברת דרך המשתווה למה שעשה עד כה, ובכל צעד נוסף יגדל המרחק אותו גומא המוקד הצעד ה 110 (בו $a = 1$) הינו קפיצה "אינסופית" שאחריה מופיע המוקד בצד השני (משמאל לציר ה x) עתה נע המוקד ימינה ומאט "מהירותו". ב 50 הצעדים האחרונים (בהם ערכו של a גדל מ 5 ל 10) עובר המוקד מרחק קטן במיוחד, בהתקרבו לציר ה x.

תרגיל מושב מספר 3

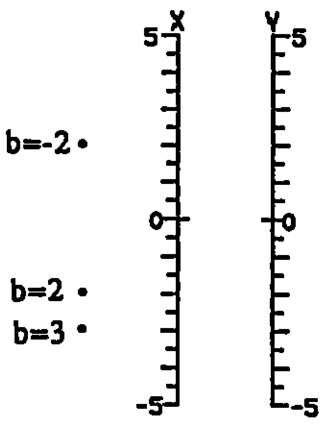
נסה לראות את קצב התשתנות של מיקום המוקד באמצעות הכנסת שינוי קל בתוכנית שבתרגיל מספר 2 הפעם, במקום להכניס כקלט את ערכי a, שנה את ערכי המקדם באמצעות לולאה הנעה בין הערכים 5- ל 5 בפסיעות של 0.05

```
200 ' * Drawing the mapping lines *
210 LINE (200,10)-(200,210)
220 LINE (250,10)-(250,210)
230 LINE (195,110)-(205,110)
240 LINE (245,110) (255,110)
300 ' * Drawing the foci locations *
310 FOR a=-5 to 5 step 0.05
320  IF a=1 THEN GOTO 350
330  Xfocus=(1/(1-a)) *50+200
340  CIRCLE ( Xfocus,110),1
350 NEXT a
```

4. השפעת b על מיקום המוקד

נעבור כעת לראות כיצד משפיע b על מיקום המוקד. נתחיל במשפחת הפונקציות $y = 2x + b$, תוך כדי בחינת ערכי b הבאים $b = 3$, $b = 2$, $b = -2$ (ראה ציור מסי 8)

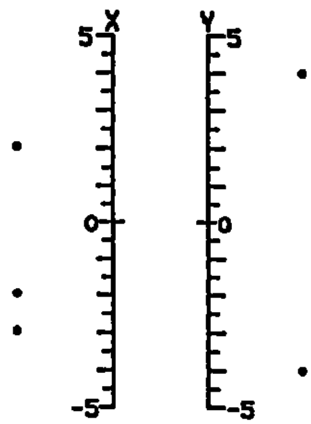
מסקנתנו הראשונה תואמת את עבודתינו עד כה. כשם שערכו של a קובע את "מיקומו



ציור מס' 8

• b=3

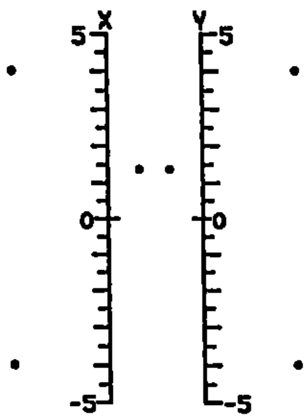
האופקי" של המוקד, כך ערכו של b קובע את "מיקומו האנכי". ננסה לאושש השערה זו באמצעות דוגמא נוספת. למשל, נשרטט את מוקד הפונקציה $y = 0.5x + b$ עבור אותם ערכי b: $b = 3$, $b = 2$, $b = -2$. התוצאה המוצגת בציור מס' 9 מעידה כי השערתינו הראשונית היתה פזיזה. מיקומו האנכי של המוקד אינו תלוי רק ב a אלא גם ב b



ציור מס' 9

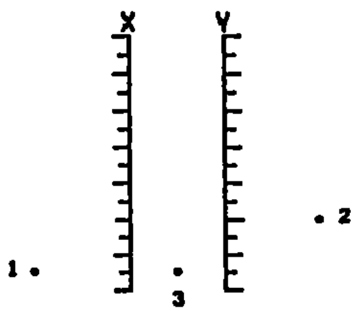
בעזרת המידע שאספנו עד כה אודות מיקומו של המוקד הינך מוזמן לזהות בציור 10 את המוקדים של שש הפונקציות הבאות·

1. $y = 2x + 4$
2. $y = 2x - 4$
3. $y = 2x + 4$
4. $y = 0\ 5x + 2$
5. $y = 0.5x + 2$
6. $y = 0.5x - 2$



ציור מס' 10

אם רצונך באתגר נוסף, הבט בציור 11 בו מערכת צירים מקבילה ללא סקלה וציון נקודת ה 0 נקודה 1 הינה מיקום המוקד של הפונקציה. $y = 2x + 3$. נקודה 2 הינה מיקום המוקד של הפונקציה $y = ½x$ מהו הייצוג האלגברי של הפונקציה אשר המוקד שלה מסומן בנקודה 3?



ציור מס' 11

5. המוקד ומשפחות של פונקציות

בסעיף זה נציג בקצרה את אחד הכיוונים שבהם ניתן להמשיך את החקירה עד כה התיחסנו למיקום המוקד של פונקציה יחידה. עתה, נתייחס אל המקום הגאומטרי של מוקדים רבים, המייצג משפחה של פונקציות. למשל, הקו המאונך לצירי הייצוג המקביל, העובר דרך הזוג הסדור (0,0), בנוסף להיותו קו מיפוי, הינו המקום הגאומטרי של משפחת הפונקציות $y = ax$. בדומה לכך ניתן לראות בכל קו מיפוי אוסף של מוקדים המייצג משפחה של פונקציות.

תרגיל מושב מספר 4

התוכנית הקצרה שלפניכם הינה הרחבה לתוכנית המוצגת בתרגיל מספר 2 עבור משפחת הפונקציות הקוויות $y=ax+b$ התוכנית מקבלת כקלט את ערכי a, ו-b של הפונקציה הקוית, ומשרטטת את המוקד בייצוג המקביל

השלם את החסר בשורה 340, על פי מסקנתך לגבי הקשר בין ערכי b (כלבדו) והמרכיב האנכי של מיקום המוקד

```
100 ' * Entering the function parameters *
150 PRINT "Enter a and b in f(x)=ax+b ";
160 INPUT a,b
200 ' * Drawing the mapping lines *
210 LINE (200,10)-(200,210)
220 LINE (250,10)-(250,210)
230 LINE (195,110)-(205,110)
240 LINE (245,110)-(255,110)
300 ' * Drawing the focus location *
310 IF a=1 THEN GOTO 360
330 Xfocus=(1/(1-a))*50+200
340 Yfocus= - ( ______ ) *50+110
350 CIRCLE ( Xfocus,Yfocus),1
360 PRINT "There is no focus when a=1"
```

תרגיל מחשב מספר 5

כדי לשרטט משפחה של פונקציות, נשנה מעט את התוכנית מתרגיל מספר 4 במקום להכניס כקלט את הפרמטרים של הפונקציה, הרץ אותם בלולאה מקוננת המשנה את ערכי a ו-b בין הערכים המבוקשים בפסיעות קטנות ככל שתרצה

```
200 ' * Drawing the mapping lines *
210 LINE (200,10)-(200,210)
220 LINE (250,10)-(250,210)
230 LINE (195,110)-(205,110)
240 LINE (245,110)-(255,110)
300 ' * Drawing the foci locations *
320 FOR a=2 to 3 step 0.05
321 FOR b=0 to 1 step 0.05
325 IF a=1 THEN GOTO 370
330 Xfocus=(1/(1-a)) *50+200
340 Yfocus=- (b/(1-a)) *50+110
350 CIRCLE ( Xfocus, Yfocus ),1
360 NEXT b
370 NEXT a
```

נציג מספר שאלות ואתגרים בהקשר זה לך הקורא

א איזו משפחת פונקציות מיוצגות באמצעות קו מקביל לצירים?

ב. איזו משפחת פונקציות מיוצגות באמצעות קו אלכסוני מסוים החוצה את הצירים?

ג. איזו משפחת פונקציות מיוצגת באמצעות קטע המוקצה על ישר אלכסוני על-ידי שני הצירים?

ד. איזו משפחת פונקציות מיוצגת באמצעות שטח מסוים, כגון ריבוע, מלבן, עיגול וכדומה?

6. סוף דבר

"עשינו" קצת מתמטיקה סביב ייצוג לא שגרתי, וזו היתה מטרתנו העיקרית במאמר זה אנו מקווים כי נהנתם. כמובן, ניתן להרחיב ולהעמיק בחקירה זו, הן בכיוונים עליהם רמזנו במהלך

המאמר והן בחקירות נוספות כגון ייצוגן של פונקציות לא קוויות. חקירה זו עשויה להיות יעילה יותר כאשר משתמשים בתוכנה אשר משחררת אותנו מחישובים טורדניים ומאפשרת להתרכז בחקירה עצמה. תוכנה זו ניתן לבנות על סמך התוכניות שהוצגו בתרגילי המחשב.

גם מעבר לחקירה המתמטית, הייצוג המקביל פותח הרבה סוגיות מעניינות לחשיבה. למשל, באיזה מידה הכרת ייצוג חדש של מושגים מוכרים מעשירה ומעמיקה את ההבנה של אותם מושגים? שאלה זו וגם שאלות נוספות הינן נושא למחקר עליו תוכל לקרוא במאמר אחר שלנו (Arcavi & Nachmias, 1989). אם תביא את הייצוג הזה בפני כיתתך, גם אתה תוכל לגלות סגולות דידקטיות מעניינות של הייצוג המקביל.

7. מקורות

רפי נחמיאס ואברהם הרכבי "סביבה ממוחשבת לייצוג פונקציות באמצעות מערכת צירים מקבילה" מספרים, כרך ב, חוברת מס' 3, טבת תשמ"ט, 7-17.

Abraham Arcavi & Rafi Nachmias. "Re-exploring familiar concepts with a new representation". *Proceedings of the 13th International Conference on the Psychology of Mathematics Education (PME 13), Paris 1989, Vol. 1, 71-78*