'ט תותיכ ידימלת ידי לע היצקנופה גשומ לש הרדגהה תנבה

הבנת ההגדרה של מושג הפונקציה על ידי תלמידי כיתות ט'

מאת: צביה מרקוביץ, בת שבע אלון, מקסים ברוקהיימר
מכון ויצמן למדע, רחובות

מבוא

"הפונקציה היא הלב והנשמה של החשיבה המתמטית", כך תאר את מקומה של הפונקציה במתמטיקה, Felix Klein (NCTM ,1934) שהיה אחד המתמטיקאים הגדולים.

על חשיבות מושג הפונקציה נאמר רבות הן על-ידי מתמטיקאים והן על-ידי אנשים העוסקים בהוראת המתמטיקה. בין השאר נאמר שיש לארגן את תכנית הלימודים במתמטיקה סביב מספר מושגים, ביניהם מושג הפונקציה, ושהבנה טובה של מושג הפונקציה מהווה בסיס איתן, ללימוד מושגים מתמטיים נוספים.

Godfrey (1917) טען, לפני כ-70 שנה, שרעיון הפונקציונליות צריך להוות חוט מקשר בתכנית הלימודים במתמטיקה, וציין שבמודע או שלא במודע, אנו מלמדים את רעיון הפונקציונליות בבית הספר מזה שנים, כי אנחנו "מוקפים" בקשרים פונקציונליים.

כיום נושא הפונקציות הוא אחד הנושאים הבסיסיים והחשובים ביותר בתכנית הלימודים במתמטיקה, החל מחטיבות הביניים, דרך בתי הספר התיכוניים ועד לאוניברסיטאות.

במאמר זה נעסוק בהגדרת מושג הפונקציה, ונביא תוצאות מחקר שבדק כיצד תלמידי כיתות ט', שלמדו את נושא הפונקציות, מבינים את הגדרת המושג.

מתולדות מושג הפונקציה*

ההגדרה המתמטית המקובלת כיום למושג הפונקציה היא דרך תורת הקבוצות:
"פונקציה מ A ל B היא תת קבוצה F של $A\times B$ כך שלכל $x\varepsilon A$ קיים $y\varepsilon B$ יחיד, עבורו $(x,y)\varepsilon F$" (Cohn ,1965).

---

*סעיף זה מבוסס בעיקר על:

1) Boyer, C.B., Proportion, Equation, Function: Three steps in the development of a concept, Scripta Mathematica, 1946, Vol. 12, 5-13 .
2) Kline, M., Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press 1972, 505-507.

קבלת הגדרה זו, שהיא חדשה יחסית (התקבלה רק לקראת המחצית השניה של המאה הנוכחית), הביאה לשינוי בהגדרת מושג הפונקציה בספרי הלימוד. אך בטרם נתייחס להגדרה המקובלת כיום בספרי הלימוד המודרניים, נביא מקצת ההיסטוריה של מושג הפונקציה, היסטוריה אשר שלובים בה שמות של מתמטיקאים ופיזיקאים מפורסמים, ואשר בעקבותיה הגיע מושג הפונקציה להגדרה המתמטית הפורמלית, ולהגדרה המקובלת בספרי הלימוד.

כיום, במבט לאחור, ניתן למצוא רמזים למושג הפונקציה כבר אצל האדם הקדמון, אשר ספר את הימים בין מופעים עוקבים של ירח מלא, ושם לב לקשר שבין מופעי הירח ובין סקלת השעות לפי השמש. המסופוטמים הקדומים הציגו זאת בטבלאות פרימיטיביות, ואילו הבבלים השתמשו כנראה באינטרפולציה לינארית למציאת זוגות מספרים נוספים, שלא נרשמו בתצפיות המקוריות.

חלפו, כנראה, כ-2000 שנים מבלי שמושג הפונקציה התפתח באופן משמעותי, עד לצעד החשוב הבא שהתרחש בפגישה בין האלגברה לגיאומטריה. Fermat ו-Descartes (במאה ה-17), בעקבות עבודות של Oresme (במאה ה-14) ואחרים, הבחינו שבאופן כללי משוואה בשני נעלמים קובעת קשר בין שני הנעלמים, כך שאם אחד מקבל קבוצת ערכים, נקבעים ערכי השני בהתאם. גילוי זה איפשר את השימוש במשתנים, ופתח את הדרך לייצוג קשרים שונים במתמטיקה ופיזיקה במונחים של משוואות. לקראת סוף המאה ה-17, המשוואות הפכו לצורת הייצוג המקובלת של הקשר הפונקציונלי.

ככל הידוע, השימוש הראשון במילה **פונקציה** נעשה בשנת 1692, על-ידי Leibniz ו-Jean Bernoulli. בתחילה ציינה מילה זו משתנים של גדלים גיאומטריים הקשורים לעקום נתון, וכן נעשה בה שימוש אלגברי לציון חזקות של משתנים. במשך המאה ה-18 ניתנו הגדרות כלליות יותר למושג הפונקציה, כשהדגש היה על כך שהפונקציה מבטאת קשר בין משתנים, ואת הקשר הזה ניתן להציג באופן אנליטי. בערך באמצע המאה ה-18, נעשה צעד גדול קדימה על-ידי Euler, שטען שפונקציה יכולה להיווצר גם על-ידי עקום המשורטט ביד חופשית במישור, דבר שאינו מחייב ביטוי אנליטי. אולם הערתו של Euler לא זכתה להתייחסות, ובמאה ה-18 המילה פונקציה היתה שוות ערך למילה משוואה, ומושג הקשר לא היה שונה מזה המופיע במשוואה במספר נעלמים.

רעיונו של Euler הופיע שוב אצל Fourier (בסוף המאה ה-18), אשר תוך כדי עבודתו נתקל בעקומים לא רציפים, וטען שהפונקציה לא חייבת להיות מיוצגת על-ידי ביטוי אנליטי כלשהו. גם רעיונו של Fourier לא התקבל על-ידי מרבית בני דורו, אך היווה הכנה טובה לקבלת דוגמא של פונקציה שנתן Dirichlet ב-1829, לפיה:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{אם } x \text{ רציונלי} \\ 1 & \text{אם } x \text{ אי-רציונלי} \end{cases}$$

ולקבלת ההגדרה שנתן Dirichlet ב-1837, שהיא ההגדרה הכללית ביותר לתקופה ההיא. ההגדרה הנ"ל אינה דורשת ביטוי אנליטי לקשר בין x ו y, אלא מדגישה את הרעיון הכללי של קשר בין שתי קבוצות (מספרים).

כל הפונקציות עד תקופה זו היו פונקציות נומריות. ההתפתחות המשמעותית הבאה של מושג הפונקציה היתה הכללה לפונקציות לא נומריות. היא התרחשה לקראת סוף המאה ה-19. מסוף מאה זו ועד אמצע המאה ה-20 ניתן למצוא הגדרות כמו של Caratheodory (1917) ושל Bourbaki (1939), שהובילו להגדרה המתמטית דרך תורת הקבוצות (שהבאנו בתחילת סעיף זה). הגדרה חדשה זו מאפשרת לכלול בתוכה פונקציות שעל-פי ההגדרות הקודמות לא יכלו להחשב לכאלה. למשל, החיבור, החיסור (ובכלל כל פעולה בינרית), הנגזרת, הטרנספורמציות הגיאומטריות - טרנספורמציות של המישור על עצמו, ועוד.

ההערות ההיסטוריות שהובאו בסעיף זה הן אמנם כלליות ביותר, אך מאפשרות להבין את התרומה הרבה שתרמה ההגדרה החדשה של מושג הפונקציה למתמטיקה.

מושג הפונקציה בספרי הלימוד

בעקבות השינויים שחלו בהגדרה המתמטית של מושג הפונקציה, חלו שינויים גם בהגדרות שהופיעו בספרי הלימוד. בספרים שהיו בשימוש עד המחצית הראשונה של המאה הנוכחית, נהגו להגדיר את מושג הפונקציה כקשר בין משתנים, כאשר f(x) סימן גם את הפונקציה וגם את המשתנה התלוי (הסימון f(x) הוכנס לראשונה על-ידי Euler בשנת 1734). בהגדרות מאוחרות יותר, מבוטאת העובדה שמושג הפונקציה כולל לא רק את המשתנה התלוי, אלא גם את ההתאמה בין המשתנה התלוי והבלתי תלוי.

ההגדרות הכלולות בספרים המודרניים, מקבילות להגדרה המתמטית הכללית של מושג הפונקציה, כשהן מותאמות לרמת התלמידים. ל-$f(x)$ יש בהן רק תפקיד אחד - הוא ממלא את מקום האיבר המותאם ל x, כלומר זהו שם אחר ל y; ואילו הפונקציה מסומנת בדרך כלל על-ידי f בלבד. אמנם ההגדרה איננה זהה בכל תוכניות הלימודים בעולם, אך מקובל שהפונקציה מוגדרת על-ידי תחום, טווח וכלל (או חוק) התאמה, המקשר לכל איבר מהתחום בדיוק איבר אחד בטווח.

בין ההצגות העיקריות של הפונקציה בספרי הלימוד ניתן למצוא: הצגה מילולית, דיאגרמות חיצים, הצגה אלגברית (על-ידי תבנית) הצגה גרפית (במערכת צירים קרטזית). הצגות נוספות של פונקציה הן: זוגות סדורים, טבלה, מערכת צירים מקבילים ועוד.
לגבי רוב הפונקציות המטופלות בבית הספר, ניתן לעבור מהצגה נתונה של הפונקציה להצגות אחרות, ובאופן כזה לתאר אותה הפונקציה במספר אופנים.

"הבנת" ההגדרה של מושג הפונקציה

"הבנה כוללת" של מושג הפונקציה, מכילה היבטים רבים, ביניהם יכולת שימוש במושג בשטחים שמחוץ למתמטיקה (לדוגמא בפיסיקה), בצד יכולת שימוש במושג בהקשרים שונים בתוך המתמטיקה עצמה (לדוגמא, גיאומטריה, טריגונומטריה). אך ללא ספק, אחד המרכיבים המרכזיים בהבנת מושג הפונקציה הוא הבנת ההגדרה של המושג.

כדי שנוכל לבדוק כיצד מבינים התלמידים את הגדרת מושג הפונקציה, קבענו מספר קריטריונים היוצרים יחד את "הבנת ההגדרה של מושג הפונקציה".
קריטריונים אלה מפרטים את הדברים שתלמיד המבין את הגדרת המושג צריך להיות מסוגל לעשות. כיוון שפונקציה מסוימת ניתן להציג בכמה אופנים, וכיוון שניתן לעבור מהצגה אחת לשניה, הבנת ההגדרה של מושג הפונקציה צריכה לבוא לידי ביטוי הן בכל אחת מההצגות, והן במעברים בין ההצגות.

הסעיפים הבאים מפרטים את "הבנת ההגדרה של מושג הפונקציה":

בתוך כל אחת מההצגות:

1, א) התלמיד יכול להבחין בין התאמה שהיא פונקציה, לבין התאמה שאיננה פונקציה.

ב) התלמיד יכול לתת דוגמא להתאמה שהיא פונקציה, ודוגמא להתאמה שאיננה פונקציה.

2. א) התלמיד יכול לזהות מקור, תמונה, וזוג מספרים המציין מקור ותמונה לפי פונקציה נתונה.
ב) התלמיד יכול למצוא תמונה לפי מקור ומקור לפי תמונה, לפונקציה נתונה.

<u>בשילוב בין הצגות הפונקציה:</u>

3. א) התלמיד יודע שאותה פונקציה ניתנת להצגה בכמה אופנים, ויכול לזהות פונקציות הזהות לפונקציה נתונה.
ב) התלמיד יודע לתרגם פונקציה מהצגה בה היא נתונה להצגה אחרת.

למרות שחלק מהנושאים הכלולים בסעיפים אלה אינם מופיעים בספר הלימוד, חשוב לדעתנו שתלמיד אשר למד את המושג, יהיה מסוגל לבצע את כל הכלול בהבנת ההגדרה של מושג הפונקציה. זאת גם דעתם של מורים, שנתבקשו להתייחס למידת החשיבות של כל אחד מהסעיפים הנ"ל, ואמרו שסעיפים אלה הם חשובים הן לתלמידי רמה א', והן לתלמידי רמה ב'.

<u>בדיקת הבנת ההגדרה של מושג הפונקציה</u>

לשם בדיקת ההבנה של הגדרת מושג הפונקציה, חיברנו לכל סעיף מספר בעיות. הבעיות התייחסו להצגות הגרפית והאלגברית בלבד, וניתנו לתלמידי כיתות ט' (ברמות א' ו-ב'), שלמדו את נושא הפונקציות לפי תכנית רחובות, והגיעו לפחות לפונקציה הקווית.
על סמך ניתוח הבעיות, שהיו ברובן בעיות פתוחות, איתרנו קשיים שהיו לתלמידים, וניסינו למצוא מה הסיבות לקשיים אלה. התוצאות שקיבלנו מתוארות בהמשך, בהתאם לסעיפים הכלולים בהגדרת מושג הפונקציה, כשלכל סעיף מצורפת בעיה לדוגמא.

תוצאות

1. א) <u>האם התלמיד יכול להבחין בין התאמה שהיא פונקציה לבין התאמה שאיננה פונקציה?</u>

לתלמידי שתי הרמות לא היו קשיים כאשר ההתאמות ניתנו בהצגה הגרפית (כמו בבעיה שבדוגמא).

<u>*בעיה לדוגמא*</u>

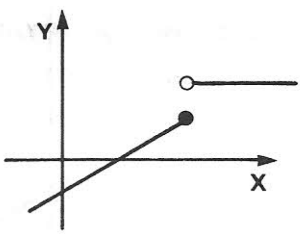
סמן מעגל סביב הטענה הנכונה והסבר:

א) ההתאמה היא פונקציה.

ב) ההתאמה איננה פונקציה

הסבר: ______________

____



אולם היו קשיים בחלק מהבעיות בהן ההתאמות ניתנו בהצגה האלגברית. תלמידים רבים משתי הרמות, התקשו לזהות התאמות קבועות כפונקציות, והנימוק הרווח לכך שהתאמות אלה אינן פונקציות היה: "ל x יש יותר ממקור אחד". נימוק זה מצביע, כנראה, על בלבול בין מושג התחום למושג הטווח. תלמידים רבים, בשתי הרמות, לא זיהו כפונקציה את ההתאמה הבאה:

$$f : \left\{\begin{matrix}\text{מספרים}\\ \text{ממשיים}\end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix}\text{מספרים}\\ \text{ממשיים}\end{matrix}\right\}$$

$$x = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + x} & x \neq -1 \\ 0 & x = -1 \end{cases}$$

וכן התאמות אחרות בהן כלל ההתאמה אינו אחיד בכל התחום (תחום מפוצל). הנימוק הרווח לכך שהתאמות מסוג זה אינן פונקציות, היה: "לכל מקור יש שתי תמונות". נראה, שהתלמידים לא שמו לב שכללי ההתאמה השונים מוגדרים בחלקים שונים של התחום.

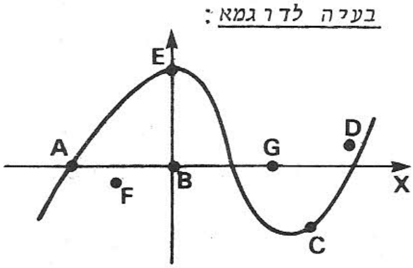
אחת הסיבות לכך שקשיים התעוררו בהצגה האלגברית, ולא בהצגה הגרפית, קשורה כנראה בספר הלימוד. שם מטופל נושא זה בהרחבה בהצגה הגרפית, ופחות בהצגה האלגברית. סיבה נוספת נעוצה, כנראה, בהבדל בתאור הפונקציה בין שתי ההצגות. בהצגה הגרפית, התחום, הטווח וכלל ההתאמה מופיעים יחד על מערכת הצירים, ואילו בהצגה האלגברית נתונים מצד אחד התחום והטווח, ומן הצד השני כלל ההתאמה, שאיננו תמיד אחיד בכל התחום. לכן, בבדיקה אם התאמה מסויימת, הנתונה בהצגה האלגברית, היא פונקציה או לא, יש לקחת בחשבון הרבה מרכיבים, הנתונים בצורה מופשטת. כנראה שקשה לשים לב לכל המרכיבים בבת אחת.

ב) <u>האם התלמיד יכול לתת דוגמא להתאמה שהיא פונקציה, ודוגמא להתאמה שאיננה פונקציה?</u>

רוב התלמידים נתנו דוגמאות נכונות, הן להתאמה שהיא פונקציה והן להתאמה שאיננה פונקציה. כאשר הסתכלנו על סוג ההצגות בהן השתמשו התלמידים, התברר שכמחצית מתלמידי רמה א' וכמחצית מתלמידי רמה ב' העדיפו להשתמש בהצגה הגרפית. תלמידים בשתי הרמות השתמשו בהצגה האלגברית, אך תלמידי רמה א' בלבד השתמשו בהצגה המילולית, ותלמידי רמה ב' בלבד השתמשו בדיאגרמות חיצים. הבדל זה יכול לנבוע מכך שבספר הלימוד של רמה ב' מדגישים יותר את ההצגה באמצעות דיאגרמות חיצים, ופחות את ההצגה המילולית, בעוד שבספר של רמה א' המצב הפוך. סיבה נוספת יכולה להיות הקושי בשימוש בתיאור מילולי שאופיני לרמה ב'.

א) <u>האם התלמיד יכול לזהות מקור, תמונה וזוג מספרים המציין מקור ותמונה לפי פונקציה נתונה?</u>

<u>בעיה לדוגמא:</u>



הבעיות בהצגה הגרפית ניתנו רק לתלמידי רמה א'. לתלמידים היו קשיים עם הנקודות הממוקמות על הצירים, ומציינות מקורות של הפונקציה (A ,B ,G) ותמונות שלה (E ,B), אך לא היו קשיים עם נקודות על העקום המציינות זוג מספרים שהוא מקור ותמונה של הפונקציה (C ,E ,A).

הבעיות בהצגה האלגברית ניתנו לתלמידי שתי הרמות. אחת הבעיות מופיעה בדוגמא. בבעיה אחרת התחום והטווח היו המספרים הממשיים וכלל ההתאמה היה קבוע.

<u>*בעיה לדוגמא:*</u>

נתונה הפונקציה:

f: {מספרים טבעיים} ⟵ {מספרים טבעיים}

$f(x) = 4x + 6$

א) *לכל אחד מהמספרים הבאים, ציין האם הוא יכול לשמש <u>מקור</u> לפי הפונקציה f, ונמק:*
1267 ,11.5 ,0 ,-1 ,2

ב) *לכל אחד מהמספרים הבאים, ציין האם הוא יכול לשמש <u>תמונה</u> לפי הפונקציה f ונמק:*
4006 ,46 ,8 ,10 ,-2

ג) *לכל אחד מזוגות המספרים הבאים, ציין האם הוא יכול לשמש כזוג מספרים שהוא <u>מקור ותמונה</u> לפי הפונקציה f ונמק:*
(2,10) , (0.5,8) , (5,26)

<u>מקור לפי הפונקציה</u> - רוב התלמידים ביצעו את הפעולה הדרושה; כלומר, בדקו אם האיבר שייך לתחום. טעויות נבעו מכך, שהתלמידים אינם יודעים בדיוק מהי קבוצת המספרים הטבעיים, ומהי קבוצת המספרים הממשיים. למשל, כ-40% מ-23 תלמידי רמה א', וכ-20% מ-17 תלמידי רמה ב' שקיבלו את השאלה, אמרו ש 0 שייך למספרים הטבעיים. אמנם טעות זו אינה מפתיעה, בהתחשב שמדובר ב 0, אך בודאי שלעובדה הבאה יש להתיחס. יותר ממחצית מתלמידי רמה א' ומתלמידי רמה ב', אמרו ש 5.5 - איננו מספר ממשי.

<u>תמונה לפי הפונקציה</u> - כמחצית מהתלמידים רק בדקו אם האיבר הנתון שייך לטווח. למשל, 8 שהוא מספר טבעי, שייך לטווח אך איננו תמונה של הפונקציה הנתונה. תשובה נכונה לגבי 8 קיבלנו רק מכ-20% מתלמידי רמה א', ומאף תלמיד מרמה ב'. כדי לענות נכון על סעיף זה, התלמידים צריכים לבצע שלוש פעולות: בדיקה אם האיבר שייך לטווח, חישוב המקור המתאים, ובדיקה אם המקור שייך לתחום. תלמידים בודדים בלבד מרמה א' עבדו נכון.

<u>זוג מספרים שהוא מקור ותמונה לפי הפונקציה</u> - תלמידים רבים לא ביצעו את שלוש הפעולות הדרושות: בדיקה האם המקור שייך לתחום, בדיקה האם התמונה שייכת לטווח, בדיקה האם המקור והתמונה הם זוג מספרים שמהווים <u>יחד</u> מקור ותמונה של הפונקציה. זוג המספרים הראשון

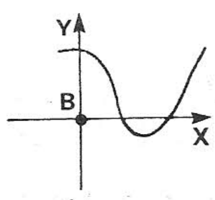
שנתנו בבעיה, מציין מקור ותמונה, אך בשני הזוגות האחרים ישנן "מלכודות". הזוג (8, 0.5) אמנם מקיים את כלל ההתאמה כי $0.5\times4+6=8$, אבל 0.5 איננו שייך לתחום. בזוג (10, 2), 2 הוא מקור של הפונקציה ו 10 הוא תמונה, אך (10, 2) איננו זוג שהוא מקור ותמונה. שני זוגות אלה גרמו לקשיים בשתי הרמות. כדי להחליט אם איבר נתון יכול לשמש תמונה לפונקציה בבעיה השניה שנתנו, בה כלל ההתאמה היה קבוע $(f(x) = 4)$, היה צורך לבדוק רק האם האיבר הנתון הוא 4 או לא. מתברר, שתלמידים מעטים בלבד עשו זאת. נראה שרבים מהתלמידים אינם מבינים שלכל המקורות בפונקציה הקבועה יש אותה תמונה.

ב) <u>האם התלמיד יכול למצוא תמונה לפי מקור, ומקור לפי תמונה לפונקציה נתונה?</u>

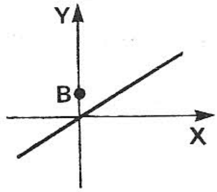
בהצגה הגרפית התעוררו קשיים, כאשר יותר ממחצית מהתלמידים סימנו את המקורות או התמונות המבוקשים על גרף הפונקציה, ולא הבינו שמקום המקורות הוא על ציר x, ומקום התמונות על ציר y. אבל במקרים רבים, מקום הסימון על גרף הפונקציה היה כזה, שעל-ידי הורדת אנך לציר המתאים, מתקבלים המקור או התמונה המבוקשים.

<u>*בעיה לדוגמא:*</u>

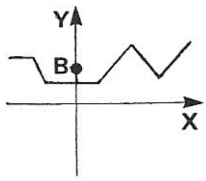
לפניך מספר גרפים של פונקציות. בכל אחד נתונה נקודה B המתארת איבר בטווח. סמן את האיברים בתחום שהם מקורות של B.



א)



ב)



ג)

בהצגה האלגברית התברר שתלמידי רמה א' ידעו למצוא תמונה לפי מקור, ומקור לפי תמונה, גם כשכלל ההתאמה דרש חישובים מסובכים יותר (בבעיה נוספת שנתנו, כלל ההתאמה היה $f(x) = -\frac{1}{2}x - 3$), אך מתקשים במציאת מקור לפי תמונה כשכלל ההתאמה קבוע.

<u>*בעיה לדוגמא:*</u>

נתונה הפונקציה

$f:$ {מספרים ממשיים} $\rightarrow$ {מספרים ממשיים}

$$f(x) = 4x + 6$$

השלם:

$f(\boxed{}) = 10$ $f(2) = \boxed{}$

$f(\boxed{}) = 8$ $f(0) = \boxed{}$

$f(\boxed{}) = -26$ $f(-\frac{1}{2}) = \boxed{}$

$f(\boxed{}) = 0$

לתלמידי רמה ב' היו קשיים רבים, בעיקר במציאת מקור לפי תמונה, שכן אז היה עליהם לפתור משוואה. הקושי היה גדול יותר כאשר כלל ההתאמה דרש חישובים מסובכים. כמו כן, היה להם קושי מיוחד כאשר כלל ההתאמה היה קבוע.

3. א) <u>האם התלמיד יודע שאותה פונקציה ניתנת להצגה בכמה אופנים, והאם יכול לזהות פונקציות הזהות לפונקציה נתונה?</u>

התלמידים אכן מבינים שניתן להציג פונקציה על-ידי הצגות שונות (הממצאים שבידינו מתייחסים לרמה א' בלבד), אך ישנם קשיים בזיהוי פונקציות הזהות לפונקציה נתונה (בשתי הרמות).

מצאנו ששינוי שם המשתנה מ x ל a לא גרם לקשיים. "צמצום" כלל ההתאמה ל $g(x) = 2x + 3$ גרם מעט לקשיים, בעיקר ברמה ב'. שינוי צורת הכתיב ל $x \longrightarrow 4x + 6$ גרמה לקשיים דווקא ברמה א'. הקושי העיקרי התעורר כאשר שינינו את התחום והטווח של הפונקציה, ממספרים טבעיים למספרים ממשיים. תלמידים רבים טענו שהפונקציה

$$g : \left\{\text{מספרים ממשיים}\right\} \longrightarrow \left\{\text{מספרים ממשיים}\right\}$$

$$g(x) = 4x + 6$$

זהה לפונקציה הנתונה f.

<u>*הבעיה שנתנו:*</u>

נתונה הפונקציה:

$$f : \left\{\text{מספרים טבעיים}\right\} \longrightarrow \left\{\text{מספרים טבעיים}\right\}$$

$$f(x) = 4x + 6$$

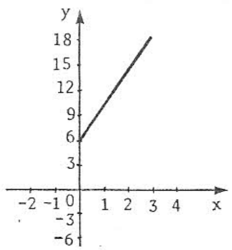
לכל אחד מהבאים, קבע האם הוא מתאר פונקציה הזהה לפונקציה f, והסבר מדוע.

דוגמאות:

א) $g : \left\{\text{מספרים טבעיים}\right\} \longrightarrow \left\{\text{מספרים טבעיים}\right\}$

$$g(x) = 2x + 3$$

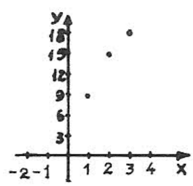
ב)



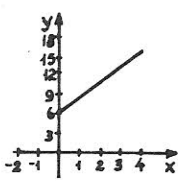
יתכן שהתלמידים לא מסתכלים כלל על התחום והטווח של הפונקציה, אלא רק על כלל ההתאמה, או ייתכן שהם אינם חושבים ששינוי בתחום ובטווח גורם לשינוי הפונקציה.

כאשר הפונקציות ניתנו בהצגה הגרפית (כמו בדוגמא ב'), התלמידים שוב לא התייחסו לתחום הפונקציה ורבים טענו ששתי הפונקציות הבאות:

(1)



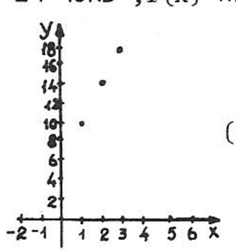
(2)



זהות לפונקציה הנתונה f. תלמידים אחרים אמרו ש (1) איננו מתאים כי "הנקודות צריכות להיות מחוברות בקו".

לעומת זאת, תלמידים רבים בשתי הרמות טענו שהפונקציה הבאה (3) אינה זהה לפונקציה הנתונה $f(x)$, כאשר רבים מהם טעו בגלל שהסתכלו על שיפועי הקווים בלבד.

(3)

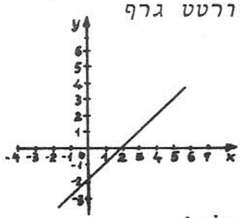


ב) <u>האם התלמיד יודע לתרגם פונקציה מההצגה בה היא נתונה להצגה אחרת?</u>

באופן כללי מצאנו שנושא התרגום קשה לתלמידי שתי הרמות, ובמיוחד לתלמידי רמה ב', הן בבעיות "מוכרות" כמו זו שבדוגמא:

<u>דוגמא א'</u>

במערכת הצירים משורטט גרף של הפונקציה h. רשום את h בכתיב פונקציות (כתיב אלגברי). רשום את התחום והטווח של h.



והן בבעיות מוכרות פחות, כמו:

<u>דוגמא ב'</u>

שרטט גרף של הפונקציה h

$h:\{\text{מספרים ממשיים}\} \longrightarrow \{\text{מספרים ממשיים}\}$

$$h(x) = \begin{cases} 4 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

פחות ממחצית מכ-40 תלמידים בשתי הרמות פתרו נכון את הבעיה שבדוגמא א'. אבל רק כ-20% מתלמידי רמה א' ואף תלמיד מרמה ב' הצליחו לפתור נכון את הבעיה שבדוגמא ב'. הטעות הנפוצה היתה שתלמידים לא התייחסו כלל ל $h(2) = 1$.

מתוך כלל הבעיות שנתנו בנושא זה, מצאנו שכאשר מדובר בפונקציה "פשוטה", המעבר גרף⟵אלגברה קשה יותר לתלמידים מאשר המעבר אלגברה⟵גרף. תוצאה זו אינה מפתיעה בהתייחס לפעולות השונות שעל התלמיד לבצע בשני סוגי המעברים.

גם בבעיות התרגום, התלמידים לא מתיחסים לתחום ולטווח. מעטים מאוד ציינו את התחום והטווח בבעיות בהן נדרש המעבר גרף⟵אלגברה (כמו בדוגמא א') למרות שנתבקשו במפורש לעשות זאת. תלמידים רבים תארו את הפונקציה:

$$g : \{\text{מספרים טבעיים}\} \longrightarrow \{\text{מספרים טבעיים}\}$$

$$g(x) = 3$$

בהצגה הגרפית, על-ידי קו רציף.

ס י כ ו ם

במאמר זה, הצבענו על מספר קשיים שמצאנו אצל תלמידי כיתות ט' בהבנת מושג הפונקציה, קשיים שהתייחסו בעיקר להבנת ההגדרה של המושג.

לקשיים אלה מספר מקורות אפשריים:

- הנושאים עצמם - מבין הנושאים שכללנו בהבנת ההגדרה של מושג הפונקציה, ישנם נושאים קשים יותר מאחרים, מבחינת מספר השלבים שהתלמיד צריך לבצע, מבחינת רמת ההבנה הדרושה לשם מתן התשובה וכו'. לדוגמא, כדי לקבוע אם איבר נתון יכול לשמש מקור של פונקציה, יש לבצע פעולה אחת, בעוד שהקביעה אם איבר הוא תמונה של פונקציה דורשת שלוש פעולות.
- ההצגות - באותו נושא עצמו מצאנו מידת קושי שונה יחסית לשתי ההצגות, הגרפית והאלגברית. מידת הקושי השונה נובעת מהאופן השונה בו מתוארת הפונקציה (התחום, הטווח וכלל ההתאמה) בשתי הצגות אלה. לא פעם, כדי לענות על אותה שאלה, לגבי שתי ההצגות השונות של אותה פונקציה, התלמידים נדרשים לבצע פעולות שונות.
- סוג הפונקציה - פונקציה קבועה ופונקציה עם תחום מפוצל, גרמו לקשיים רבים יותר מאשר פונקציות אחרות.
- מידת הטיפול בספר הלימוד - כפי שכבר ציינו, ישנם נושאים הכלולים בהבנת ההגדרה של מושג הפונקציה, אך אינם מטופלים כלל או אינם מטופלים בצורה מספקת בספר הלימוד. יש לשער שבמקרים מסויימים זהו אחד המקורות לקושי, אם כי דווקא נושא התרגום, שמטופל בהרחבה בספר הלימוד, גרם אף הוא לקשיים.

כל האמור לעיל, יטופל בעת שיכתוב ספר הלימוד. בינתיים כדאי להתייחס לנושאים הכלולים בהבנת ההגדרה של מושג הפונקציה, ולהשתמש בשאלות המופיעות במאמר זה (ראה הנספח) ובשאלות דומות אחרות, במטרה לצמצם ככל האפשר את קשיי התלמידים בנושא.

<u>מקורות</u>

המחלקה להוראת המדעים - מכון ויצמן למדע - <u>פרקי מתמטיקה</u>, ספר ד', אלגברה II, רחובות, תשל"ז.

המחלקה להוראת המדעים - מכון ויצמן למדע - <u>פרקים נבחרים במתמטיקה</u>, ספר ד', אלגברה II, רחובות, תשל"ז.

Cohn, P.M., <u>Universal Algebra</u>. Harper Row Publ., 1965.

Godfrey, C., The Algebra Syllabus in the Secondary School. In <u>Special Reports on Educational Subjects</u>, Board of Education, Vol. 26, HMSO, London, 1912, 280-311.

NCTM (The National Council of Teachers of Mathematics), <u>Relational and Functional Thinking in Mathematics</u>, The Ninth Yearbook, 1934, Hamley, H.R. (Ed.)

נספח – אוסף בעיות

הבעיות המצורפות מהוות חלק מהבעיות שנתנו לתלמידים במסגרת עבודה זו.

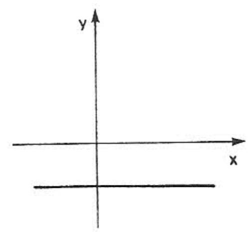
1. לגבי כל אחת מההתאמות הבאות, בחר בטענה הנכונה והסבר:

א) ההתאמה היא פונקציה.

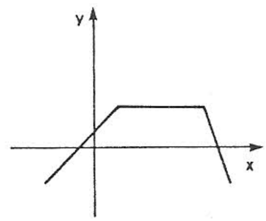
ב) ההתאמה איננה פונקציה.

הסבר: ______________________________

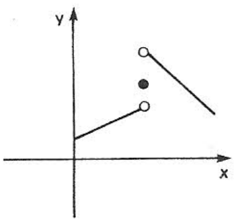
____



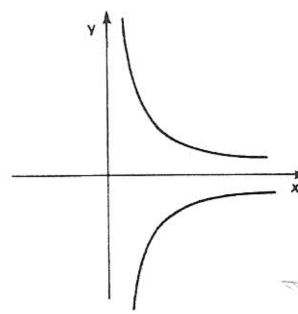
א.



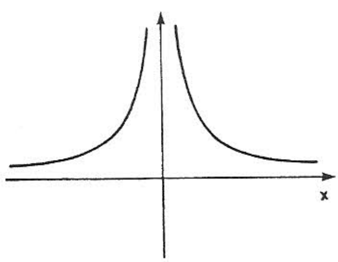
ב.



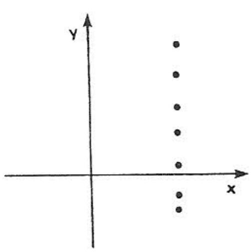
ג.



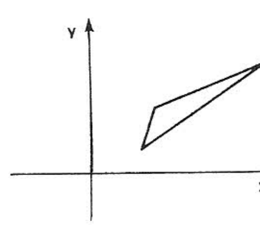
ד.



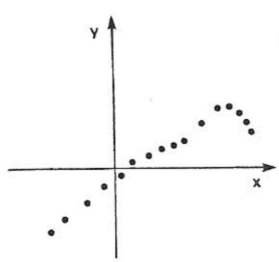
ה.



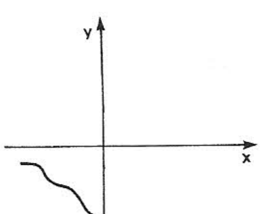
ו.



ז.



ח.



ט.

2. לגבי כל אחת מההתאמות הבאות, בחר בטענה הנכונה והסבר:

א) ההתאמה היא פונקציה.

ב) ההתאמה איננה פונקציה.

הסבר: ______________________________

____

א) h : {מספרים ממשיים} ⟵ {מספרים ממשיים}

$h(x) = 0.3$

ב) f : {מספרים ממשיים} ⟵ {מספרים ממשיים}

$x \to |x|$, $x \to -|x|$

ג) k : {המספרים הטבעיים} ⟵ {המספרים השלמים}

$$x \to \begin{cases} 2 & \text{זוגי } x \\ -2 & \text{אי זוגי } x \end{cases}$$

ד) $g : \{3, 7, 9, -1, 0\}$ ⟵ {המספרים הטבעיים}

$x \to 3x - 1$

ה) k : {מספרים ממשיים} ⟵ {מספרים ממשיים}

$$k(x) = \begin{cases} -3x^2 + 3 & x \geq 0 \\ 5 & x < 0 \end{cases}$$

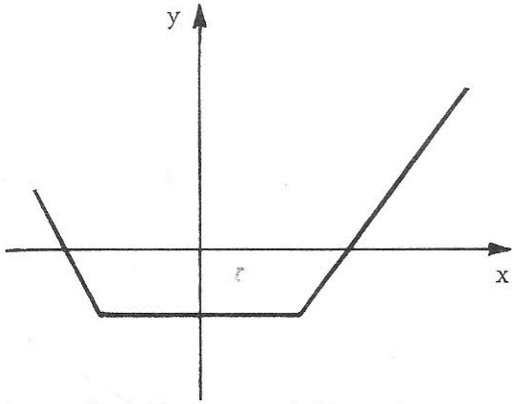
ו) h : {מספרים ממשיים} ⟵ {מספרים ממשיים}

$x \to -\frac{5}{3}x^4 + 12x - 7.9$

ז) g : {המספרים הממשיים} ⟵ {המספרים הממשיים}

$g(x) = 2500x^2 - 0.0009x$

3. לפניך גרף של פונקציה:



א) סמן ב A נקודה המתארת מקור של הפונקציה.

ב) סמן ב B נקודה המתארת תמונה של הפונקציה.

ג) סמן ב C נקודה המתארת זוג מספרים שהוא מקור ותמונה של הפונקציה.

ד) סמן ב D נקודה <u>שאיננה</u> מתארת זוג מספרים שהוא מקור ותמונה של הפונקציה.

4. נתונה הפונקציה:

f : {מספרים ממשיים} ⟵ {מספרים ממשיים}

$f(x) = 4$

א) לכל אחד מהמספרים הבאים, ציין האם הוא יכול לשמש <u>מקור</u> לפי הפונקציה f, ונמק את תשובתך.

0 , 9.07 , -5.5 , 3

ב) לכל אחד מהמספרים הבאים, ציין האם הוא יכול לשמש <u>תמונה</u> לפי הפונקציה f, ונמק את תשובתך.

3.3 , 4 , 0 , 12

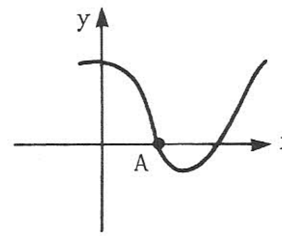
ג) לכל אחד מזוגות המספרים הבאים, ציין האם הוא יכול לשמש כזוג שהוא <u>מקור ותמונה</u> לפי הפונקציה f ונמק את תשובתך.

(19,4) , (0,0) , (0,4) , (2,8)

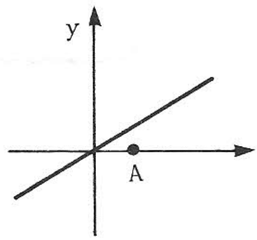
5. לפניך מספר גרפים של פונקציות.

בכל אחד מסומנים איבר (A) או מספר איברים (A,B,...) מהתחום.

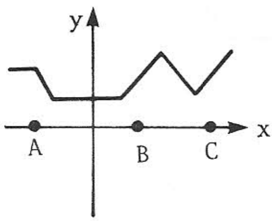
סמן את התמונות שלהם בטווח.



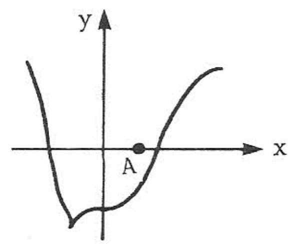
א.



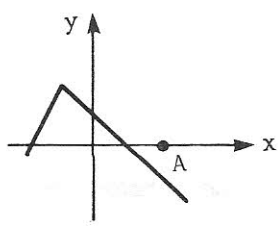
ב.



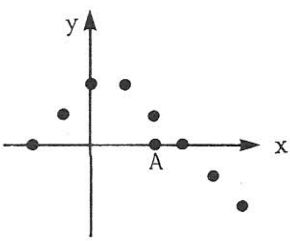
ג.



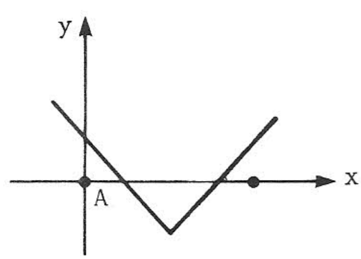
ד.



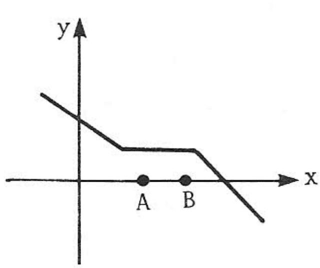
ה.



ו.



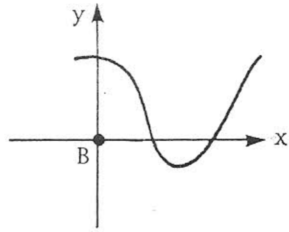
ז.



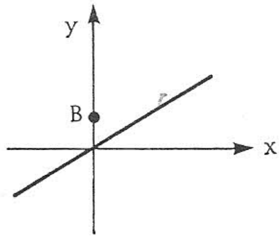
ח.

6. לפניך מספר גרפים של פונקציות.

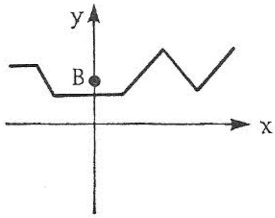
בכל אחד נתונה נקודה B המתארת איבר בטווח. סמן את האיברים בתחום שהם מקורות של B .



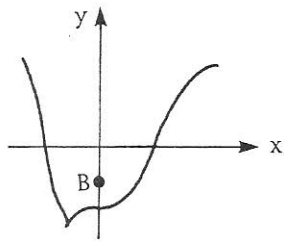
א.



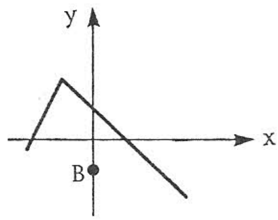
ב.



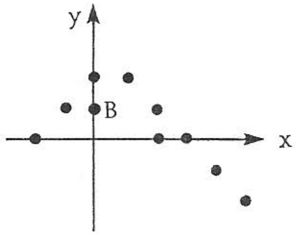
ג.



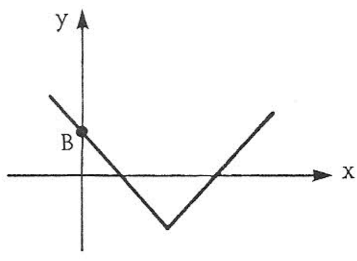
ד.



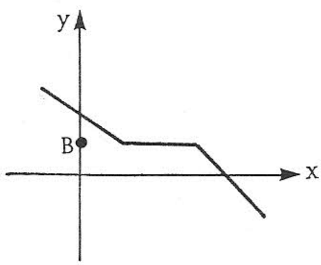
ה.



ו.



ז.



ח.

7. נתונה הפונקציה:

$$g : \{\text{מספרים ממשיים}\} \longrightarrow \{\text{מספרים ממשיים}\}$$

$$g(x) = -7$$

א) השלם:

$g(4) = \boxed{}$

$g(0) = \boxed{}$

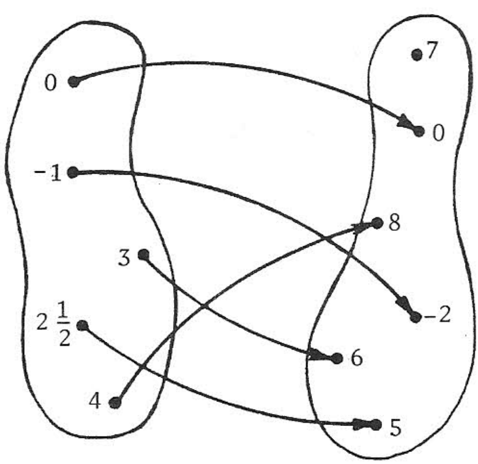
$g(-7) = \boxed{}$

$g(3.5) = \boxed{}$

ב) האם קיים a ממשי כך ש $g(a) = 3$?
האם קיימים ערכי a נוספים כך ש $g(a) = 3$?
נמק את תשובתך.

ג) האם קיים a ממשי כך ש $g(a) = -7$?
האם קיימים ערכי a נוספים כך ש $g(a) = -7$?
נמק את תשובתך.

8. הצג את הפונקציה הבאה בצורות אחרות:



9. נתונה הפונקציה

f : {מספרים טבעיים} ⟶ {מספרים טבעיים}

$$f(x) = 4x + 6$$

לכל אחד מהבאים קבע האם הוא מתאר פונקציה הזהה לפונקציה f, והסבר מדוע.

א) g : {מספרים טבעיים} ⟶ {מספרים טבעיים}

$$g(a) = 4a + 6$$

ב) g : {מספרים טבעיים} ⟶ {מספרים טבעיים}

$$g(x) = 2x + 3$$

ג) g : {מספרים ממשיים} ⟶ {מספרים ממשיים}

$$g(x) = 4x + 6$$

ד) g : {מספרים טבעיים} ⟶ {מספרים טבעיים}

$$g(x) = 2(2x + 3)$$

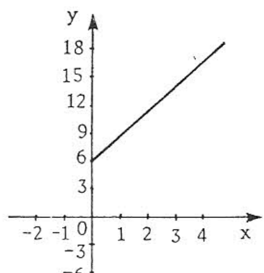
ה) g : {מספרים טבעיים} ⟶ {מספרים טבעיים}

$$g(x) = m(x) + 6$$

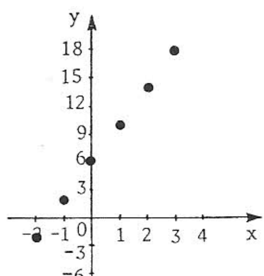
כאשר:

m : {מספרים טבעיים} ⟶ {מספרים טבעיים}

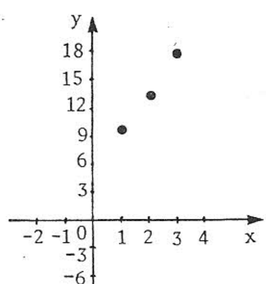
$$m : x \longrightarrow 4x$$



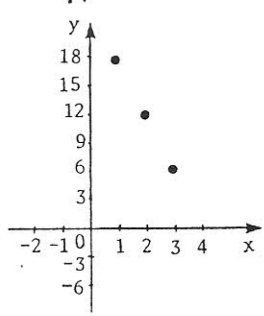
ו.



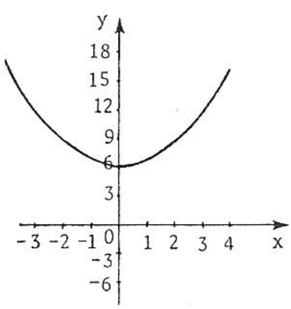
ז.



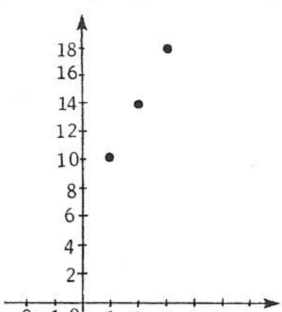
ח.



ט.

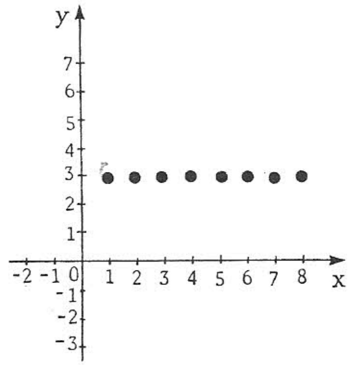


י.

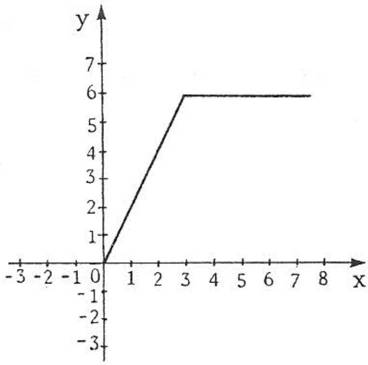


יא.

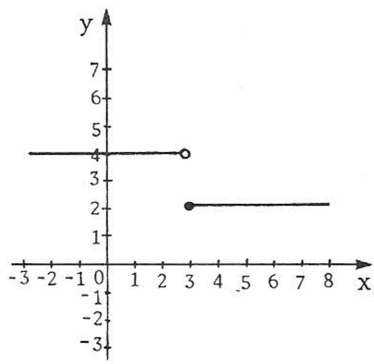
10. בכל אחת ממערכות הצירים הבאות, משורטט גרף של פונקציה.
רשום את הפונקציה בכתיב פונקציות (כתיב אלגברי).
ציין את התחום והטווח של הפונקציה.



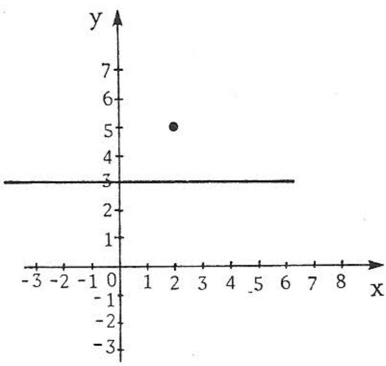
א.



ב.



ג.



ד.

11. שרטט את הגרף של כל אחת מהפונקציות הבאות:

א. h : {מספרים ממשיים} $\longrightarrow$ {מספרים טבעיים}

$$h(x) = \begin{cases} 4 & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases}$$

ב. h : {מספרים ממשיים} $\longrightarrow$ {מספרים ממשיים}

$$h(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 3 \\ 6 & x > 3 \end{cases}$$