... Y en matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos?

(article begins on next page)

NÚMEROS. Revista de didáctica de las matemáticas
Volumen 38, junio de 1999, páginas 39-56

... Y en matemáticas, los que instruimos ¿qué construimos?

Abraham Arcavi

Resumen

Proponemos una perspectiva constructivista para el diseño instruccional en matemáticas. Sugerimos algunos principios de diseño que tiene en cuenta las capacidades de los alumnos de dar sentido y encaminarse hacia un entendimiento significativo, en lugar de sugerir la descomposición de habilidades básicas para la graduación de los contenidos, el diseño de problemas y tareas encaminadas a un desempeño competente. Proponemos, además, que desde una perspectiva constructivista, la ingeniería curricular se comprometa seriamente con la práctica en el aula para poder así diseñar los apoyos necesarios para la construcción significativa del aprendizaje.

Abstract

We propose a constructivist perspective to instructional design in mathematics: instead of using a skill decomposition approach to the desing of tasks and problems geared towards competent performance, we delineate some desing principles which take into account the student sense-making capabilities aimed at meaningful understanding. We also propose that, under a constructivist view, curriculum engineering must be deeply inter-twined with the development of classroom practices to support meaningful construction of learning.

En este artículo describo algunos principios de diseño curricular desde un dominio específico y una perspectiva constructivista.

Circunscripción a un dominio del conocimiento: matemática

Mi profesión es la educación matemática, que es la disciplina (o quizá interdisciplina) que se ocupa de tratar de entender los procesos de aprendizaje y enseñanza de la matemática y también el proceso de diseño de materiales curriculares. Creo que la matemática, como todo dominio del conocimiento humano, tiene ciertas especificidades que merecen un tratamiento separado. Quizá lo que expongamos en este artículo sea transferible en su forma más general a otros dominios del conocimiento, pero sin duda habrá que tener en cuenta las características propias de esos dominios.

Predilección teórica: constructivismo

Hoy en día todos (o casi todos) somos constructivistas. El problema es que cada uno de nosotros construye esta postura de manera muy diferente. Y esta Babel de teorías, creencias o ideologías que se refugian bajo un mismo vocablo, va más allá de la ya clásica distinción entre constructivismo «blando» versus constructivismo «radical» (Kilpatrick, 1987, Schoenfeld, 1992a). Un sinfín de matices, no siempre visibles a «ojo descubierto», hacen que quizá haya tantos constructivismos como constructivistas declarados. Confío en que mi versión se aclarará en el resto de este artículo, a través de ejemplos y episodios. Sólo agregaré que mi perspectiva se nutre de la sistemática observación de la conducta de los alumnos en la resolución de las situaciones que atestigua, a mi entender, cambios en sus estructuras cognitivas mostrando un riquísimo proceso de construcción y «re-construcción» progresivo de ideas y concepciones (véase, por ejemplo, Schoenfeld, Smith y Arcavi, 1993).

Reivindicación y revisión de la práctica curricular y docente

Creo firmemente que la sabiduría acumulada en experiencias de campo (enseñanza en el aula, preparación de textos de estudio) acompañada de un proceso de reflexión y análisis, guía (o debería guiar) los trabajos de investigación y las elaboraciones teóricas. Ésta es la filosofía de trabajo del grupo de Matemáticas del Departamento de Enseñanza de las Ciencias del Instituto Weizmann, del cual soy miembro y en el cual me he formado. Este grupo está trabajando en diseño curricular, formación de docentes en servicio, e investigación pedagógica-cognitiva desde hace más de 25 años. El trabajo se basa en la integración de esos tres componentes de tal manera que los resultados de uno nutren a los otros dos en ciclos de continua refinación y replanteo (Dreyfus, Hershkowitz y Bruckheimer, 1987). Parte de lo que presentaré aquí se gestó práctica e intelectualmente en este grupo durante 15 años.

En resumen, la perspectiva de educación matemática desde la cual escribo integra la experiencia de campo con la reflexión y la observación sistemáticas que caracterizan a la investigación cognitiva.

Diseño curricular y constructivismo

Si tomamos las versiones extremas de *instructional design* y de constructivismo, estas dos posturas son absolutamente incompatibles. La primera postura asume que el conocimiento es objetivo y externo al sujeto, tiene existencia propia y, por lo tanto, puede ser plausible de análisis lógico y formal. El constructivismo por su lado, redefine el concepto de conocimiento como una función adaptativa, mediante la cual los resultados de nuestros esfuerzos cognitivos tienen como propósito ayudarnos a hacer frente y entender el mundo de nuestras experiencias. Esas experiencias son subjetivas y, por ende, no pueden ser capturadas en la forma de conocimiento externo, objetivo, disociado de un sujeto. Lo que sí existe, diría esta postura, son *dominios de consenso* que se crean a través de comunicación y negociación intersubjetiva (Von Glasersfeld, 1991, p. XIV).

Detenemos aquí nuestra brevísima (y quizá hasta simplista) descripción de dos posturas que merecen un tratamiento mucho más extenso, para examinar sus implicaciones inmediatas en el diseño de la enseñanza de las matemáticas. La preocupación fundamental de la primera postura, en su versión más clásica (e.g. basada en Gagné, 1979), se centra en la descomposición lógica de un determinado dominio de conocimiento. Esta descomposición consiste en una concatenación jerarquizada de átomos de conocimiento, por lo general proposiciones y destrezas de cálculo, cuya suma total describiría lo que significa ser competente en el dominio matemático elegido. Este marco serviría de esqueleto formal y objetivo para la creación de secuencias articuladas de ejercicios y problemas, cada uno diseñado para ejercitar una destreza específica. Estas secuencias actuarían de avenida de acceso al dominio en cuestión que debe ser recorrido ordenadamente por el alumno.

La posición constructivista se opondría a estas implicaciones por dos motivos. Primero, porque servirían de base a un entrenamiento *training*, y no a una enseñanza *teaching,* encaminado a que los alumnos alcancen *competent performance,* es decir, a que sean técnicamente diestros, pero no acostumbrados a generar explícitamente comprensión y sentido de lo que se aprende (op. cit.). Segundo, porque la descomposición lógica y objetiva excluye la posible existencia de vías idiosincrásicas de generar comprensión, ya que el acceso al conocimiento, o a los dominios de consenso, se basa en experiencias subjetivas (y negociaciones intersubjetivas de los significados).

Cabe entonces preguntarse, ¿qué puede aportar el constructivismo al diseño de la instrucción?. Quizá una posible respuesta radical es: nada. Es decir, como es el sujeto el único que tiene acceso al mundo de su propio conocimiento, es él el único indicado para diseñar o trazar las tareas y los problemas de los cuales se ocupará. Nadie mejor que aquél que aprende para determinar su propio interés, su propia motivación y generar las preguntas para construir sus respuestas. Por lo tanto hay muy poca cabida para el diseño de la instrucción. Descartamos esta postura de tonalidades anárquicas, porque creemos que los alumnos (o la gran mayoría de ellos) no pueden tener acceso por sí solos a la visión global de un dominio; sin guía adecuada, difícilmente sabrán los alumnos qué preguntar, y por qué interesarse. Es indispensable proponer una cierta estructuración externa de las actividades de enseñanza que esté al servicio de las siguientes funciones: ser el trampolín para que el alumno empiece a generar sus propias preguntas; mostrar y ejemplificar el uso significativo de las herramientas de trabajo de ese dominio (no necesariamente procedimientos algorítmicos, sino sobre todo estrategias de pensamiento); proponer modelos de pericia, y embarcar al alumno en prácticas de trabajo consistentes con el espíritu con el que actúan expertos en la materia (Schoenfeld, 1992b). En nuestra opinión, esa estructuración es fundamental en lo que entendemos como diseño curricular y diseño de la enseñanza.

¿Dónde estamos entonces? Si por un lado descartamos la descomposición lógica tradicional como base de diseño curricular, y por el otro rechazamos posturas anárquicas, debemos aún responder a nuestra pregunta anterior: ¿qué puede aportar el constructivismo al diseño de la instrucción?. Como dijimos al principio, éste es el objetivo de este artículo y lo analizaremos a través de ejemplos específicos.

Diseño de actividades y problemas: algunos ejemplos

Quizá toda variante del constructivismo esté de acuerdo con la siguiente afirmación: el objetivo de la educación en matemática es que el alumno genere y construya comprensión. Pero, ¿qué significa comprender matemática?. Bishop (1985), entre otros, sostiene que en matemática comprender una idea (o una expresión, o un concepto) es conectar el significado de esa idea con el significado de otra idea en matemática, o en otro dominio del conocimiento o en la vida diaria. Bettencourt (1991), Schoenfeld (l992b) y otros, agregan que además comprender implica también insertar esas ideas, y también insertarse, en una comunidad determinada, con sus prácticas, sus instrumentos de pensamiento, sus creencias, sus modos de discurso y acción.

¿Qué implicación tiene lo antedicho en el diseño de una actividad matemática?. La actividad, o el problema, a diseñarse tiene que promover la construcción de ese tipo de comprensión y estimular interacciones similares a las que ocurrirían en una comunidad de expertos.

Primer ejemplo: división

a) Una piscina tiene una superficie de 84 metros cuadrados, si su ancho es 6 metros, ¿cuál es su largo?

b) Esta noche visitarán la escuela 84 padres. En cada mesa se pueden sentar 6 padres. ¿Cuántas mesas se necesitan? (versión modificada del ejemplo de Gravemeijer, citado en Nunes. Schliemann y Carraher, 1993, donde se incluye un croquis de una mesa y seis sillas a modo de ejemplo).

Ambos problemas están presentados en forma verbal *(word problems)* y en ambos la respuesta se obtiene por medio de una sola operación aritmética, que en ambos casos es 84/6. Un análisis lógico consideraría a estos problemas como estructuralmente idénticos.

Pero si dejamos de lado la estructura lógica de la solución de ambos problemas y los observamos bajo una lente constructivista, estos problemas son muy diferentes. En el primero, el alumno debe recordar el aspecto operativo del concepto de área (área = multiplicación de la medida del ancho por la medida del largo), localizar los datos, llevar a cabo la operación y escribir su resultado. Si el alumno no recuerda, o no conoce el algoritmo de cálculo del área, no puede resolver este problema. Por otro lado, si el alumno sí recuerda el algoritmo ¿qué aprende al resolver este problema satisfactoriamente?. Probablemente no *mucho* más que reforzar una destreza técnica referida al aspecto puramente procedural de un concepto. El problema en sí no parece proveer demasiadas oportunidades ni para introducir un concepto nuevo ni para enriquecer conceptos conocidos, conectándolo a otras ideas, embarcándose en una genuina actividad matemática. Además, el hecho de que en el enunciado haya una piscina o una ventana o X (cualquier objeto plano conocido o desconocido), es totalmente irrelevante, y no contribuye en modo alguno a la resolución. En general, podría concluirse que este problema no es más que un disfraz verbal de un simple ejercicio técnico.

El segundo problema, en cambio presenta una situación, no demasiado lejana del mundo del alumno, y que puede ser activada en forma experimental. Es decir, aún cuando el alumno todavía no ha estudiado división, o si ya conoce su mecanismo pero no sabe si se aplica a este problema, puede embarcarse en formas *sui generis* de resolución. Por ejemplo, (Nunes, Schliemann y Carraher, 1993): algunos alumnos dibujan pequeños rectángulos que representan mesas, escriben en su interior el numero 6, cuentan de a seis hasta alcanzar el número de personas deseado, y luego cuentan el número de mesas. Otros alumnos, notan que 10 mesas son necesarias para 60 personas (aplicando lo que saben, 6 x 10 = 60), y de allí calculan cuántas mesas más son necesarias. Esta forma puede servir de base para la construcción colectiva del algoritmo de división. Si los alumnos ya conocen el concepto de división y saben aplicar el algoritmo de cálculo, el problema puede ser levemente modificado: en lugar del dato inicial de 84, puede darse 87. En este caso el número no es divisible por 6, y por lo tanto el número de mesas que se requiere (15 mesas) no aparece inmediatamente en el resultado de la división (14 con resto 3). Por lo tanto, el algoritmo en sí no garantiza una respuesta a menos que se aplique una visión crítica del resultado obtenido usando el sentido común; si la división da 14 pero hay un resto de 3, significa que hay tres personas sin ubicar, por lo tanto es necesario agregar una mesa más. Es decir, se necesitan 15 mesas.

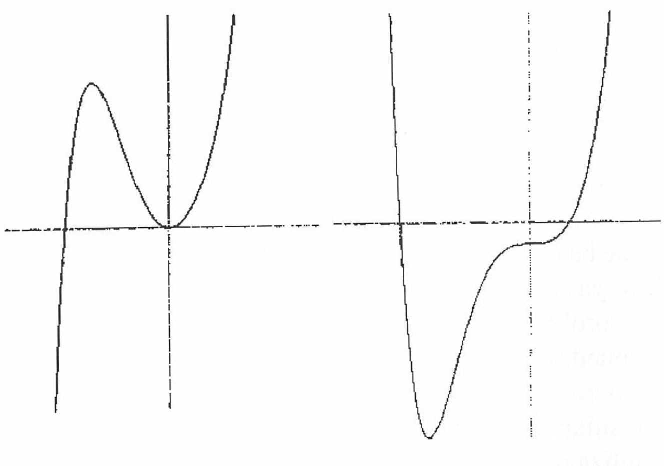
En este caso, el problema resuelto puede generar nuevas preguntas, por ejemplo: ¿cuántas mesas estarán completas y cuántas no?. La respuesta no es única y da lugar a una reinspección del problema en la cual procedimientos mecánicos de cálculo no son de mucha utilidad.

Segundo ejemplo: función y su función derivada

Mencionamos anteriormente que los ejercicios y los problemas típicos que encuentra un alumno en el curso de su estudio de matemática se basan en el conocimiento de una técnica, un algoritmo o un procedimiento que al ser aplicado conduce a la respuesta deseada. Esa respuesta es precisamente el resultado de una manipulación formal. El problema anterior de las mesas y las sillas no escapa a esta categoría, sólo que lo proponemos antes de que el alumno sepa la técnica de la división, o si la sabe, modificamos el problema para que la técnica por sí sola no conduzca inmediatamente a la solución.

En esta sección sugerimos que el diseño curricular debe crear problemas para los cuales ninguna técnica preaprendida sea útil, y el alumno se vea obligado a movilizar su comprensión de los conceptos y los conecte con otros conceptos conocidos.

El ejemplo que presentamos aquí está tomado del análisis matemático y se refiere al concepto de derivada de una función: los siguientes gráficos (en escalas idénticas) describen una función y su función derivada. El objetivo es producir el mayor número de argumentos mediante los cuales sea posible identificar cuál es la función y cuál su derivada.



En general, los textos de estudios ponen mucho énfasis en las reglas técnicas de derivación. En este problema, en cambio, la técnica de derivación no nos sirve de ayuda, porque las funciones están dadas en su representación gráfica; por lo tanto, para resolver este problema el alumno debe manipular el concepto, su significado, sus implicaciones y su relación con otros conceptos. Además, el problema invita a mucho más que a una respuesta a la pregunta ¿quién es quién?. La intención de este problema es que los alumnos produzcan argumentos diferentes y que los discutan en pequeños grupos o colectivamente. En este caso, la respuesta a un problema no es el resultado de una operación, sino una argumentación en la cual hay que hacer uso de lo que uno sabe acerca del concepto.

Hay alumnos que observan el número de raíces de cada función, hay quiénes tratarán de adivinar el grado de cada función, hay quiénes usarán el concepto de derivada como la «pendiente en un punto» y tratarán de ver cuál de las funciones describe esos cambios en relación con la otra.

La riqueza de la actividad que un problema de este tipo puede generar, contribuye a la construcción del concepto de derivada en su forma más amplia.

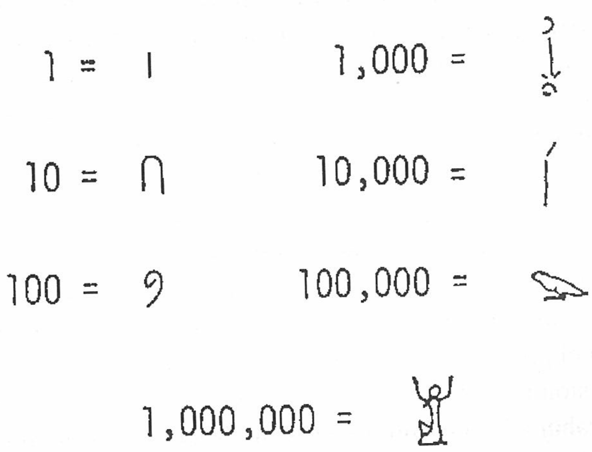
Tercer ejemplo: la multiplicación egipcia

Kaput (1987) sostiene que hay una tendencia general por parte de los programas de estudio más comunes a subestimar el rol de las representaciones externas en matemática. En general, se cree que el curriculum de la escuela primaria es acerca de números, mientras lo que en realidad ocurre es que una gran parte del curriculum es acerca de las propiedades de una representación muy particular del concepto de número: la representación decimal. Kaput sostiene que la *fuerza* de los algoritmos numéricos que aprendemos y enseñamos en la escuela primaria reside en la libertad de poder manejarnos con una representación muy conveniente que nos permite manipulaciones relativamente fáciles que en realidad nos hacen olvidar la esencia de los números que representan. Entonces tendemos a confundir la representación con el concepto, el algoritmo con el proceso que ese algoritmo representa.

Esta confusión debe ser tenida en cuenta para poder diseñar problemas en los cuales el trabajo del alumno consista en disociar la representación del concepto representado. Sugerimos aquí que esa disociación no puede ser llevada al nivel de discusión filosófica explícita (que sólo confundiría a los alumnos), sino a través de acciones orientadas a conocer otras representaciones. Al conocer otra representación de un concepto y al tratar de comprender su sentido, se generan comparaciones y contrastes que arrojan nueva luz sobre aquello que dábamos por sobreentendido en la representación conocida, liberándonos de sus particularidades y permitiendo que nos acerquemos a la esencia de los conceptos.

Hemos trabajado en diseño curricular de este tipo en varios temas. Uno de ellos fue crear un micromundo que permite representar gráficamente funciones matemáticas en un par de ejes paralelos (PAR), en lugar de los tradicionales ejes cartesianos ortogonales. Observamos a alumnos y docentes que exploraron funciones lineales en PAR y hemos documentado situaciones en las cuales una nueva representación fuerza el «re-conocimiento» y el «re-aprendizaje» de conceptos sabidos. Esos conceptos están «confundidos» con las representaciones conocidas, y hasta sus nombres llevan el sello indeleble de la representación cartesiana: pendiente de una recta, intersección con los ejes etc., por eso, cuando uno debe verlos en una nueva representación surgen preguntas y observaciones que los enriquecen. Esas experiencias están descritas en Arcavi y Nachmias (1989).

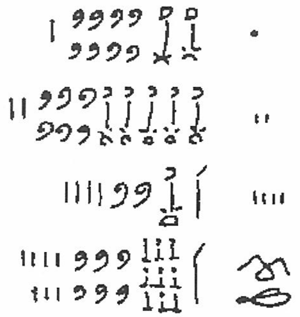
Aquí presentaremos otro ejemplo de una actividad diseñada con ese propósito. El problema (Arcavi, 1987) consiste en descifrar y entender la forma en que los antiguos egipcios operaban con números enteros en su particular representación. El sistema de numeración de los egipcios consistía en los siguientes símbolos, cuya juxtaposición permite representar cualquier número entero.



El problema que diseñamos fue presentar el texto jeroglífico fiel al original del Papiro Rhind (que es el documento matemático escrito más antiguo del cual se tenga conocimiento, data del siglo 17 o 18 A.C.) y requerir primero la traducción de los símbolos a nuestra representación:

Verisón Jeroglífica[2] Versión decimal

Verisón Jeroglífica[3] Versión decimal



1	2801
2	----
4	----
Total	19607

Luego, el problema consiste en tratar de entender qué operación se realizó en este texto, por qué la operación es correcta, y si es posible operar de la misma manera con dos números cualesquiera. Los alumnos descubren, no sin esfuerzo, que la operación que se realizó es una suma de (1+2+4) veces el número 2801, es decir una multiplicación (7 x 2801) para la cual sólo se necesita saber hallar el doble de un número dado y saber sumar, lo cual es muy simple en la representación egipcia, y también en la decimal. La pregunta sobre la generalidad del método genera discusiones muy interesantes.

Cuarto ejemplo: el factor de corrección

Quizá sea un lugar común afirmar que todo curriculum en matemática debe contar con problemas realistas que permitan usar instrumentos matemáticos para resolver situaciones de la vida diaria. En efecto, encontraremos este tipo de problemas en casi todos los libros de texto. Pero muchas veces la observación crítica revela que muchos de esos problemas no son más que excusas para resolver más ejercicios y su conexión con lo real es apreciablemente artificial. De esta manera, el metamensaje de estos problemas lleva a percibir la actividad matemática como algo esotérico y artificial. El diseño de problemas realistas debería estar inspirado en situaciones que aparecen en la vida diaria, que tienen el potencial de despertar el interés del alumno y que la aplicación de herramientas matemáticas haga que el alumno comprenda mucho mejor la complejidad de la situación dada.

El siguiente problema surgió cuando mi hija adolescente volvió un día de su escuela comentando que las notas del examen de matemática (sobre el concepto de función y su representación gráfica) fueron bajas y, por lo tanto, la profesora decidió adoptar un factor de corrección. El factor consistía en extraer la raíz cuadrada de la calificación que correspondía y multiplicar el resultado por diez. Por ejemplo, si la nota que correspondía era 81, el factor la corregiría a 90 (es decir, $10 \times \sqrt{81}$). Lamentablemente esta situación pasó desapercibida e inexplotada en una clase donde podía haberse usado para enriquecer precisamente el concepto de función, y además para entender las sutilezas del factor de corrección. Por ejemplo, se podría investigar:

- Si el factor eleva la nota de todos los alumnos,
- ¿A quién favorece más este factor de corrección?,
- Si existe algún alumno para el cual el factor no corrige la nota,
- Si existen otros factores más o menos justos, etc.

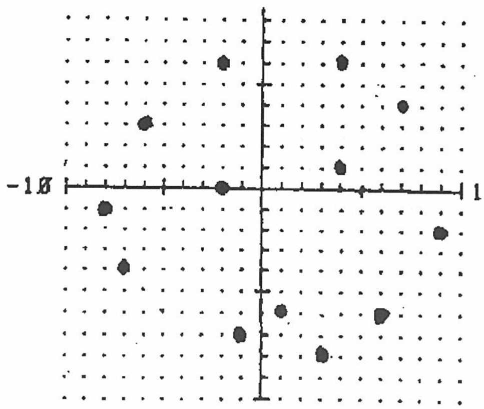
La actividad incluiría tratar de justificar las respuestas en forma numérica, gráfica y algebraica. Cabe notar que el concepto de función en sus diversas representaciones es crucial para entender a fondo esta situación y poder responder a los items citados. Después de probar este problema con docentes y alumnos, y confirmar que provee oportunidades ricas de aprendizaje, lo incorporamos a nuestro curriculum.

En este caso fue una situación real, surgida de la vida diaria del alumno y no del diseño artificial, la que encontró su lugar en el curriculum. El interés intrínseco de este problema (puede presentarse como un proyecto de discusión para que la clase elija entre tres o cuatro factores de corrección) y el aporte de las herramientas matemáticas, hace que el estudio se convierta en significativo, apropiado y motivante. Conceptos abstractos pueden de pronto aparecer como instrumentos para comprender situaciones concretas

Hay quiénes afirman (por ejemplo Papert, 1980) que nuestro mundo cotidiano es bastante pobre en lo que se refiere a oportunidades matemáticas, comparado por ejemplo con las oportunidades de vivenciar fenómenos físicos con aplicaciones en ingeniería simple. No obstante, situaciones matematizables existen, y uno puede encontrarlas si las busca. Son esas las situaciones que deberían inspirar los problemas reales para ser incorporados en el curriculum.

Quinto ejemplo: los globos verdes

Green Globs (Dugdale y Kibbey, 1986) es un juego matemático para microcomputadoras, basado en una idea simple pero muy ingeniosa. La pantalla del computador nos muestra un sistema de ejes cartesianos sobre la cual aparecen 13 globos localizados en posiciones que el programa elige al azar cada vez que uno comienza un nuevo juego. El objetivo del juego es disparar contra el mayor número de globos posible. El disparo consiste en producir una función cuyo gráfico toca, es decir, rompe, los globos, y para poder obtener ese gráfico hay que introducir la forma algebraica de la función. La siguiente es una réplica de una pantalla típica.



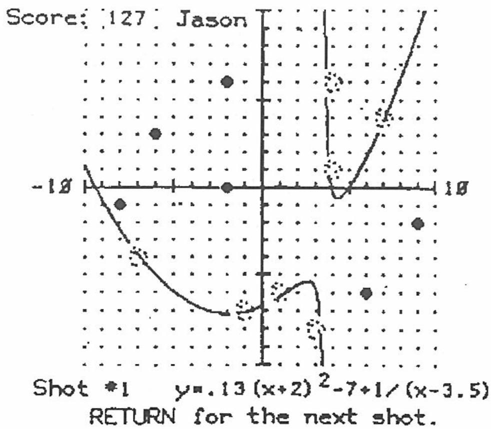
En esta disposición del gráfico podríamos intentar una función lineal, una cuadrática, etc. La puntuación que obtiene el alumno crece en forma exponencial, de manera que por el primer globo que logre romper obtendrá 1 punto, 2 por el segundo, 4 por el tercero, 8 por el cuarto y así sucesivamente. Así, el juego invita al alumno a romper el mayor número de globos posibles con la misma función.

¿Qué ilustra este juego?

Primero, ofrece una posibilidad de hacer gráficas de funciones con mucha facilidad descargando el peso del cálculo y la representación, ambos tediosos, en la computadora que lo hace instantáneamente librando nuestras energías para pensar, analizar y razonar, en lugar de gastarlas en operar técnicamente. Segundo, contrastemos el tipo de pensamiento que requiere este juego con lo que en general se requiere durante el estudio de análisis matemático. Tradicionalmente el ejercicio más común consiste en aplicar procedimientos para estudiar las características gráficas de una función dada en forma algebraica: sustituciones y resolución de ecuaciones para averiguar los puntos de intersección con los ejes, derivar e igualar la derivada a cero para estudiar posibles puntos extremos, pasar al límite para investigar la existencia de asíntotas, etc. En este caso, se trata de lo inverso, la construcción de una forma algebraica dadas las características de un cierto gráfico que uno quisiera construir. Uno podría pensar en establecer un sistema de ecuaciones para encontrar el valor de los parámetros pero en general no es el tipo de actividad que este juego genera. En general los trabajos de observación de alumnos con este juego muestran formas de pensar más informales, empíricas, cualitativas e intuitivas en las cuales se investiga el rol de los distintos parámetros y cómo influyen en la forma final del gráfico. Por ejemplo, en el caso de la ecuación de una recta, muchos alumnos comienzan tratando de visualizar la pendiente, desarrollando destrezas de estimación, y si la función que resulta no fuera la deseada, trabajan sobre las correcciones necesarias de la expresión inicial. Esta forma informal de pensar desarrolla la intuición y la comprensión de los conceptos, que muchas veces para el alumno son opacos, ocultos tras los procedimientos formales.

La siguiente es una situación que fue registrada en la literatura (Dugdale, 1993) como un ejemplo del tipo de actividad cognitiva que este juego puede promover.

Un alumno, atrapado por este juego, se propuso lograr puntuaciones altas. Habiendo obtenido una distribución de globos como la indicada en la figura anterior, el alumno visualizó una parábola, cuya ecuación pudo crear ($y = 3 (x+2)^2 - 7$). Pero esta parábola sólo rompería cuatro globos, aquellos cuyos centros están en (-7,4), (- 1,-7), (1,-6) y (7,4). Su razonamiento fue el siguiente: «si quisiera obtener tres globos más que están en la posición vertical próximos a la recta x = 3.5, necesitaría que la función a usar siga siendo parábola en casi todo su dominio (para poder tomar los cuatro globos anteriores), pero que en las inmediaciones de x=3.5 se comporte como una vertical, o casi como una vertical». Y después de mucho investigar, logró traducir las características deseadas al diseño de una ecuación, cuyo gráfico se comporte de acuerdo a lo deseado. Lo hizo mediante la adición de un término racional, que lejos de x = 3.5 no afecta seriamente los valores de la función inicial, pero en las inmediaciones de x = 3.5 se comporta casi como una vertical.



En resumen, este juego provee oportunidades de aprendizaje al permitir formas de pensamiento que no sólo no están en el curriculum tradicional, sino que sería muy difícil hacer surgir en otro contexto. El aprendizaje que resulta en este caso tiene que ver con una conexión entre lo formal, lo gráfico y lo intuitivo. En este caso, el diseño de instrucción consistió en crear un microentorno lo suficientemente amplio e interesante como para que sean los alumnos, quienes, actuando dentro de ese entorno, definan y diseñen los problemas en los que quieren trabajar. Es decir, es el alumno quién elige el problema que va a resolver, es él quién elige el tipo de función que usará y cuántos globos serán su objetivo. Si es el alumno el que define el problema, el problema le pertenece, y por lo tanto es probable que la motivación, la inversión de tiempo, esfuerzo y recursos a su disposición tenderá a ser mayor que con un problema ajeno o definido por el docente. Pero esa decisión se hace dentro de un marco pre-estructurado y pre-diseñado, que en este caso es el juego mismo.

Diseño de actividades y problemas: algunos principios

Los anteriores son sólo algunos ejemplos que ilustran de qué manera el espíritu del constructivismo puede guiar el diseño de actividades y problemas en matemáticas. Aunque la lista es sólo parcial, intentaremos un resumen de los principios de diseño que emergen de estos ejemplos.

Quizá un primer principio general para elegir problemas apropiados descartaría el mero análisis lógico que se centra en el tipo y número de operaciones a aplicarse en la resolución de un problema. Desde ese punto de vista, muchos problemas pueden ser similares, y sin embargo su potencial educativo es radicalmente diferente. La elección de un problema, entonces, debería tener en cuenta:

- que el alumno pueda usar su experiencia previa (situación familiar y manejable) y que haya una invitación implícita para aplicar su sentido común,
- que sea posible resolver el problema de más de una manera para generar un diálogo conducente a conectar formas diferentes de pensar,
- que la respuesta no sea accesible solamente por medio de aplicación mecánica de un procedimiento de cálculo,
- que el problema se preste para elaborar preguntas nuevas, es decir, que la solución del mismo despierte la curiosidad y el alumno por su cuenta, o en grupo, o con ayuda de su maestro, abra la posibilidad de seguir explorando la situación,
- que no siempre haya una respuesta única al problema,
- que la respuesta no sea siempre el resultado de una operación, sino la formulación de un argumento, una comparación, una idea, una conexión entre conceptos, una traducción entre diferentes representaciones,
- que el problema invite a rever una idea, un concepto o una operación en una nueva representación, para tratar de desentrañar, en la medida de lo posible, el concepto y separarlo de sus representaciones prototípicas,
- que haya problemas genuinos de la vida real para los cuales el uso de herramientas matemáticas ayude a comprender mejor fenómenos que nos rodean,
- que haya micro entornos diseñados por expertos pero que dentro de esos entornos sea el alumno quien formule y decida qué tipo de problema resolver.

En el proceso de diseño, estos principios (y otros) guían la formulación de problemas. El diseño debe nutrirse además de un constante sondeo de campo, mediante el cual establecemos de qué manera los problemas son abordados por los alumnos, y muchas veces son esas observaciones las que ayudan a reestructurar los problemas y/o refinarlos (en Arcavi, Hadas y Dreyfus, 1994, describimos en detalle un ejemplo de ese proceso).

Es importante destacar que la lista anterior no es una lista completa, y aún cuando tengamos una lista de principios más detallada y refinada, la perspectiva constructivista implica que el diseño de problemas es sólo una pequeña parte de la tarea educativa. Si bien hay problemas que son potencialmente más ricos que otros, y el análisis en base a los principios expuestos nos ayudaría a distinguirlos, debemos mencionar que la tarea de diseño tiene sus limitaciones. Allí donde termina esta tarea, comienza otra tarea, la de estructurar, conducir y guiar la actividad del alumno para que en base al problema diseñado haya una genuina movilización de la comprensión, ricas interacciones y diálogos. Es decir, que es el rol del docente el que hará que el trabajo del alumno sea conducente a la construcción de conocimiento explotando así el potencial del curriculum.

Últimamente se ha puesto mucho énfasis en los estudios especiales de aulas de matemática (por ejemplo, Schoenfeld, 1992b). En esas experiencias la promoción del diálogo, la discusión colectiva, el planteamiento de hipótesis y su exploración, el delegar parte de la responsabilidad del aprendizaje al alumno son algunos de los principios de enseñanza. Estos principios que son intrínsecos a la perspectiva constructivista no siempre pueden ser incorporados a un curriculum escrito ni ser capturados en principios de diseño. Es el docente del aula quien en contacto cotidiano con sus alumnos y ejercitando al máximo su capacidad de escuchar, quien concluye lo iniciado en el diseño, orquestando una clase donde se promueva la construcción de conocimiento de acuerdo al espíritu en que los problemas fueron diseñados.

En suma, si bien el diseño curricular bajo una perspectiva constructivista puede cambiar drásticamente el tipo de textos de estudio en matemática, no es más que un primer paso en el arduo camino de crear e implementar experiencias ricas de enseñanza-aprendizaje. Es la actividad guiada por un experto, la que puede agotar el potencial de un buen curriculum.

Y nosotros ¿qué construimos?

Nosotros, los que adoptamos como desafío ayudar a los alumnos a construir con sentido ideas, conceptos y prácticas en matemática, también construimos.

Primero, construimos problemas y actividades que ofrecen oportunidades de generar conocimiento, de establecer conexiones entre distintos conceptos, de afrontar dificultades.

Segundo, construimos, o mejor dicho reconstruimos y revisamos el entendimiento de nuestro propio conocimiento. Muchas veces lo hacemos desarmando nuestra compilación de conceptos, reencontrando distintas formas de ver los contenidos, inspirándonos en nuestra observación sobre cómo son abordados por nuestros alumnos.

Postscript

Esta nota está motivada por el desafío de las editoras de este volumen[1] al preguntarme «por qué mi propuesta no puede implementarse a través de *Instructional Design*». Lo que sigue es un breve intento de respuesta. Mi propuesta presenta principios y ejemplos de diseño de instrucción que, a mi juicio, no están contemplados en (o son ajenos a) la postura tradicional de Instructional Design.

En su versión más clásica el ID:

1. apunta a una descomposición lógica de los contenidos y, por lo tanto, el diseño puede hacerse a priori por expertos y sin contacto alguno con alumnos;

[1] "Se refiere a Ana Teberosky y Liliana Tolchinsky-Landsmann editoras de Substratum a quienes agradecemos encarecidamente la deferencia que han tenido con la revista Números al permitir reproducir este artículo".

2. enfatiza los aspectos más «conductistas» de lo que significa ser competente en matemática definiendo «behavioral objectives»;
3. presupone que el diseño de instrucción debería estar exclusivamente en manos de expertos quienes son los indicados para establecer los contenidos, los problemas y sus secuencias;
4. no parece dar cabida a concepciones alternativas de la actividad matemática;
5. parece implicar que el diseño curricular «riguroso», al tener en cuenta la textura lógica de los contenidos garantiza, una trayectoria satisfactoria de aprendizaje, etc.

La perspectiva constructivista en cambio:

1. sostiene que la descomposición lógica de un problema no es suficiente (dos problemas pueden ser lógicamente idénticos, el primero generar entendimiento y el segundo no) y, por lo tanto, está muy atenta a la forma en que el contenido es percibido por el alumno, trata de capturar su punto de vista, las actividades que éste genera, e incorporarlo al diseño (primer ejemplo del presente artículo);
2. subordina los aspectos más técnicos de la enseñanza al servicio de aspectos de comprensión y conexión entre contenidos, por ejemplo, saber ejecutar el proceso de derivación de una función no es el objetivo más importante, sí lo es comprender el sentido del concepto en sus diferentes contextos (segundo ejemplo del artículo) o entender el sentido de un procedimiento (tercer ejemplo);
3. da lugar a que sea el alumno quién proponga un problema y lo elabore sin preocuparse demasiado por establecer si él tiene todos los pre-requisitos lógicos para resolverlo porque confía en el poder del alumno en encontrar soluciones idiosincrásicas (quinto ejemplo);
4. permite y legitima aspectos de la actividad matemática que no son puramente deductivos (medir, inducir, formular hipótesis, estimar, experimentar, cambiar de representaciones) y que no siempre son plausibles de ser tenidos en cuenta en un diseño a *priori;*
5. sostiene que el diseño curricular es apenas un primer paso, es la propuesta de un escenario, pero serán los actores quiénes den vida a ese diseño; es decir, un diseño curricular puede ser potencialmente rico, pero no garantiza el alcance de la comprensión que generará.

Notas

1. La literatura especializada (Schoenfeld. 1990) ha documentado que muchas veces los alumnos acostumbrados a la aplicación *ciega* de

algoritmos, no siempre apelan a su sentido común, porque en el marco escolar y desde muy niños aprendieron a percibir la matemática como la actividad de aplicar algoritmos establecidos que no siempre tienen sentido.

2. Tal cual aparece en Peet (1970).

Bibliografía

Arcavi, A. (1987). Using Historical Materials in the Mathematics Classroom. *Arithmetic Teacher, 35(4).* pp. 13-16.

Arcavi, A. y Nachmias, R. (1989). *Re-exploring familiar concepts with a new representation Proceedings of the I3th Inrernational Conference on the Psychology of Mathernatics Education (PME 13).* Paris. V.l, pp. 77-84.

Arcavi, A., Hadas, N. y Dreyfus, T. (1994). Engineering Curriculum Tasks on the Basis of Theoretical and Empirical Findings. *Proceedings of the 18th International Conference on the Psychology of Mathematics (PME 18).* Lisbon, Vol. 11, 280-287.

Bettencourt, A. (1991). On What it Means to Understand Science. *Second International History and Philosophy of Science Proceedings,* p.77-86, Canada.

Bishop, A. (1985). The Social Construction of Meaning: A Significant Development for Mathematics Education. *For the learning of mathematics,* 5, 24-28.

Dugdale, S. y Kibbey, D. (1986). *Green Globs and Graphing Equations [*A computer based instructional package]. Sunburst Communication, Pleasantville: New York.

Dugdale, S. (1993). Functions and Graphs - Perspectives on Student Thinking. En Romberg T. A., Fennema E. y Carpenter T.P. (Eds.) *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*, pp. 101-130. Lawrence Erlbaum Associates.

Dreyfus, T., Hershkowitz, R. y Bruckheimer, M. (1987). Processes in the transition from syllabus to curriculum. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik.* 19 (l), pp. 19-26.

Gagné. R. M. (1979). *Principles of Instructional Design.* Holt, Reinhart y Wisnton.

Kaput, J. (1987). Representation Systems in Mathematics. En Janvier C. (Ed.) *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, pp. 19-26. L.Erlbaum Associates, Kilpatrick, J. (1987). What Constructivism might be in Mathematics Education?. *Proceedings of the 11th International Conference on* the *Psychology of Mathematics Education (PME 11).* pp. 2-27. Montreal.

Nunes, T., Schliemann, A.D. y Carraher, D.W. (1993). *Street Mathematics and School Mathematics,* pp. 148-152. Cambridge University Press.

Papert, S. (1980). *Mindstorms.* Basic Books.

Peet, T.E. (1970). *The Rhind Mathematical Papyrus.* University of Liverpool Press.

Schoenfeld, A.H. (1990). On mathematics as sense-making: An informal attack on the unfortunate divorce of formal and informal mathematics. En Voos J., Perkins D. y Segal J. (Eds), *Informal Reasoning and Education,* pp. 311-343. Erlbaum.

Schoenfeld, A.H. (1992a). Radical constructivism and the pragmatics of instruction- A review of Radical Constructivism in Mathematics Education, editado por Ernst von Glasersfeld. *Journal for Research in Mathematics Education,* 23(3). pp. 290-295.

Schoenfeld, A. H. (1992b). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. En Grouws D.A. (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and* Learning, pp. 334-370. Macmillan Publishing Company.

Schoenfeld, A. H., Smith, J. P. y Arcavi, A. (1993). Learning- The Microgenetic Analysis of One Student's Evolving Understanding of a Complex Subject Matter Domain. En Glaser, R. (Ed.) *Advances in Instructional Psychology, Vol 4,* pp.55-175. Erlbaum.

Von Glasersfeld, E. (1991). Introduction. En von Glasersfeld, E. (Ed.) *Radical Constructivism in Mathematics Education,* pp. xiii-xx. Kluwer Academic Publishers.

Abraham Arcavi
Department of Science Teaching
Weizmann Institute of Science
76100, Rehovot - ISRAEL.

Este artículo fue publicado por SUBSTRATUM, en Vol. II, Nº 6, pp. 77-94, (1995).